Opgaver i kombinatorik

Opgave 1
På hvor mange måder kan man farve to felter på et 7×7 skakbræt gule og resten grønne, når to farvninger regnes for ens hvis den ene fremkommer af den anden ved en drejning?

Opgave 2
En mængde af positive heltal siges at være *trekantet* hvis den har tre elementer som svarer til de tre sidelængder i en ikke degenereret trekant. Bestem det største hele tal n for hvilket alle delmængder med ti elementer af mængden $\{4, 5, 6, \dots, n\}$ er trekantede.

Opgave 3
Den voksende følge $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$ består af alle positive hele tal som er potenser af 3 eller summer af forskellige potenser af 3. Bestem tal nummer 100 i følgen.

Opgave 4
En elev der keder sig frygteligt går langs en række med 1024 lukkede skabe nummeret fortløbende 1 til 1024. Hun åbner det første skab, springer det næste over, åbner det næste igen og springer atter et over, og sådan fortsætter hun til hun er nået helt ned for enden af rækken. Så går hun tilbage igen og åbner denne gang det første lukkede skab, springer det næste lukkede skab over, åbner det næste lukkede skab, osv. Sådan fortsætter hun frem og tilbage til der kun er et lukket skab tilbage. Hvilket nummer har det?

Opgave 5
Til et matematikstævne opdager deltagerne at for et bestemt tal m $m > 3$, gælder at hver gang man udtager m deltagere, da har de netop en fælles ven. (Hvis A er ven med B, er B også ven med A, og man er ikke ven med sig selv). Hvor mange venner har den deltager som har flest venner?

Opgave 6
Lad A og B være disjunkte mængder hvis fællesmængde er mængden af positive hele tal. Vis at for ethvert positivt helt tal n findes der to forskellige hele tal a og b, begge større end n, således at $\{a, b, a + b\}$ er en delmængde af enten A eller B.

Opgave 7
Syv drenge og 13 piger stiller sig på en række hånd i hånd. Tallet S betegner antallet af drengehænder som holder en pigehånd. Beregn gennemsnittet af S når man betragter alle 20! mulige opstillinger af de 20 personer.

Opgave 8
Betragt en regulær tolvkant $A_1A_2 \dots A_{12}$ med centrum O. De trekantede områder OA_iA_{i+1}, $i = 1, 2, \dots, 12$ hvor $A_{13} = A_1$, skal males røde, blå, grønne eller gule således at to trekanter som har en side tilfælles, ikke har samme farve. På hvor mange måder kan tolvkanten farvelægges?

Opgave 9
I et enmandsspil er der 64 mønter som er stablet i nogle bunker. Et lovligt træk består i at udvælge to bunker med henholdsvis p og q mønter, $p \geq q$, og fjerne q mønter fra bunken med p mønter og placere dem i bunken med q mønter. Er det uanset hvordan mønterne er stablet til at starte med, muligt at få alle mønterne i en bunke efter et endeligt antal lovlige træk?

Opgave 10
Bestem det mindste positive hele tal n, $n \geq 4$, for hvilket det altid er muligt at vælge fire forskellige tal a, b, c, d blandt n forskellige hele tal således at $a + b - c - d$ er delelig med 20.

Opgave 11
Lad X være en endelig mængde af positive heltal. Undersøg om der for alle delmængder A af X findes en delmængde B af X med den egenskab at A netop består af de elementer fra X som går op i et ulige antal elementer fra B.

Opgave 12
Bestem alle talfølger $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ som opfylder at for alle $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, da er x_j det antal gange som j optræder i følgen.

Opgave 13
En talfølge $s_0, s_1, s_2, \ldots$ af ikke-negative heltal, hvor $s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$, siges at være *superadditiv* hvis $s_{i+j} \geq s_i + s_j$ for alle ikke negative heltal i, j. Antag at $\{s_n\}$ og $\{t_n\}$ er to superadditive talfølger, og lad $\{u_n\}$ være den talfølge der opfylder at hvert heltal optræder samme antal gange i $\{u_n\}$ som i $\{s_n\}$ og $\{t_n\}$ tilsammen, samt at $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots$. Vis at $\{u_n\}$ er superadditiv.