

## Talteoriopgaver \*

### Opgave 1

Tallet  $n$  består af 81 cifre som alle er 1-taller. Vis at  $n$  er delelig med 81.

### Opgave 2

Vis at hvis  $3x + 4y$  og  $4x + 3y$  begge er kvadrattal for to naturlige tal  $x$  og  $y$ , da er både  $x$  og  $y$  delelige med 7.

### Opgave 3

To positive hele tal  $n$  og  $m$  består begge af 2009 cifre og er begge syvendepotenser. Det 4018-cifrede tal  $k$  konstrueres ved at skrive alle cifrene i  $n$  efterfulgt af alle cifrene i  $m$ . Er det muligt at  $k$  også er en syvendepotens?

### Opgave 4

Vis at  $2^n + 3^n$  ikke er et kvadrattal for noget naturligt tal  $n$ .

### Opgave 5

Bestem samtlige primtal  $p$  for hvilke  $p$  går op i  $13^{p^2} + 1$ .

### Opgave 6

Vis at et naturligt tal  $n$  som skrives udelukkende med cifrene 1, 3, 7 og 9, har en divisor på mindst 11.

### Opgave 7

Vis at tallet  $n$  er et primtal netop hvis  $n$  går op i

$$P = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + (n-3)(n-3)!$$

## Løsninger til talteoriopgaver \*

### Opgave 1

Da 111111111 er delelig med 9, findes et helt tal  $a$  så  $9a = 111111111$ . Dermed er

$$n = 9a(10^{9 \cdot 8} + 10^{9 \cdot 7} + \dots + 10^{9 \cdot 1} + 10^{9 \cdot 0}),$$

og da

$$10^{9 \cdot 8} + 10^{9 \cdot 7} + \dots + 10^{9 \cdot 1} + 10^{9 \cdot 0} \equiv 1 + 1 + \dots + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{9},$$

er  $n$  delelig med 81.

### Opgave 2

Sæt  $3x + 4y = m^2$  og  $4x + 3y = n^2$ . Ved at addere ligningerne ser vi at  $7x + 7y = n^2 + m^2$ , og da de kvadratiske rester modulo 7 netop er 0, 1, 2 og 4, må både  $m$  og  $n$  være delelige med 7. Dette viser at  $m^2 + n^2 = 7(x + y)$  er delelig med  $7^2$ , og dermed at  $x + y$  er delelig med 7. Subtraktion af de oprindelige ligninger giver  $x - y = n^2 - m^2$  hvilket også er deleligt med 7. Når både  $x + y$  og  $x - y$  er delelige med 7, følger det let at både  $x$  og  $y$  er delelige med 7.

### Opgave 3

Sæt  $n = x^7$  og  $m = y^7$ . Da er

$$k = 10^{2009} \cdot x^7 + y^7 = (10^{287} \cdot x)^7 + y^7.$$

Ifølge Fermats store sætning kan en syvendepotens ikke være en sum af to syvendepotenser.

### Opgave 4

Hvis  $n$  er ulige, er  $2^n + 3^n \equiv 2 \pmod{3}$ , og da 2 ikke er kvadratisk rest modulo 3, kan  $2^n + 3^n$  ikke være et kvadrattal.

Hvis  $n$  er lige, sættes  $n = 2k$ . Antag at der findes et  $n$  så  $2^{2k} + 3^{2k} = m^2$ . Da er

$$3^{2k} = (m + 2^k)(m - 2^k),$$

Dvs. at der findes et tal  $s$ ,  $0 \leq s < k$ , så

$$m - 2^k = 3^s \text{ og } m + 2^k = 3^{2k-s}.$$

Ved addition af de to ligninger får man

$$2m = 3^s + 3^{2k-s}.$$

Da  $m$  ikke er delelig med 3, må  $s = 0$ . Ved at subtrahere de to ligninger får man

$$m + 2^k - (m - 2^k) = 3^{2k} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{k+1} = 3^{2k} - 1.$$

Men  $2^{k+1} < 3^{2k} - 1$  for alle naturlige tal  $k$ . Dermed er  $2^n + 3^n$  ikke et kvadrattal for noget naturligt tal  $n$ .

**Opgave 5**

Lad  $p$  være et primtal. Ifølge Fermats lille sætning gælder at

$$13^{p^2} + 1 = (13^p)^p + 1 \equiv 13^p + 1 \equiv 13 + 1 = 14 \pmod{p}.$$

Primtalet  $p$  går dermed netop op i  $13^{p^2} + 1$ , hvis  $p$  går op i 14, dvs.  $p = 2$  eller  $p = 7$ .

**Opgave 6**

Antag at der findes et tal af den omtalte type som ikke har en divisor på mindst 11. Da tallet er ulige og ikke kan være deleligt med 5, må det være på formen  $3^a \cdot 7^b$ . Vi vil nu vise at dette er umuligt, da alle tal på formen  $3^a \cdot 7^b$  har et lige antal 10'ere, og desuden 1, 3, 7 eller 9 som sidste ciffer. Dette vises ved induktion. Det er oplagt for  $1 = 3^0 \cdot 7^0$ . Antag at  $m = 3^a \cdot 7^b$  har et lige antal 10'ere, og desuden 1, 3, 7 eller 9 som sidste ciffer. Da vil  $3m$  også have 1, 3, 7 eller 9 som sidste ciffer, og hvis  $m$  har  $s$  10'ere, vil  $3m$  have  $3s$  eller  $3s + 2$  10'ere, og dermed et lige antal 10'ere. Desuden vil  $7m$  også have 1, 3, 7 eller 9 som sidste ciffer, og hvis  $m$  har  $s$  10'ere, vil  $7m$  have  $7s$ ,  $7s + 2$ ,  $7s + 4$  eller  $7s + 6$  10'ere, og dermed et lige antal 10'ere.

**Opgave 7**

Bemærk først at  $k \cdot k! = (k + 1) \cdot k! - k! = (k + 1)! - k!$ . Dette giver

$$P = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \cdots + ((n - 2)! - (n - 3)!) = (n - 2)! - 1.$$

Ifølge Wilsons sætning går  $n$  op i  $(n - 1)! + 1$  når  $n$  er et primtal, og omvendt er det klart at  $n$  ikke går op i  $(n - 1)! + 1$  hvis  $n$  ikke er et primtal, da  $(n, (n - 1)!) > 1$ . Vi har dermed at  $n$  er et primtal, netop hvis  $n$  går op i  $(n - 1)! + 1$ . Da

$$(n - 1)! + 1 = (n - 1)(n - 2)! - (n - 1) + n = (n - 1) \cdot P + n \equiv -P \pmod{n},$$

er  $n$  et primtal netop hvis  $n$  går op i  $P$ .