Talteoriopgaver

Kvadratiske rester En kvadratisk rest modulo n, er et helt tal r, $0 \leq r < n$, for hvilket der findes et helt tal a så $a^2 \equiv r \pmod{n}$.
Fx er de kvadratiske rester modulo 3 netop 0 og 1, da $0^2 \equiv 0$, $1^1 \equiv 1$ og $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$.
Bemærk at når vi skal finde samtlige kvadratiske rester modulo 3, så behøver vi blot at vælge en repræsentant for hver af de tre restklasser modulo 3, fx 0, 1 og 2, og derefter se på kvadratet af disse rester modulo 3.

Divisorer
Et naturligt tal n større end 1 med primfaktoropløsning

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

har $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_m)$ forskellige divisorer.

BEVIS. Enhver divisor i n kan skrives entydigt på formen

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m},$$

hvor $\beta_i \in \{0, 1, \dots, \alpha_i\}$. Dermed har n i alt $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_m)$ forskellige divisorer.

Opgave 1
Bestem de kvadratiske rester modulo 4 og modulo 8.

Opgave 2
Vis at summen af kvadraterne af m på hinanden følgende hele tal ikke kan være et kvadrattal for $m = 3, 4, 5, 6$.

Opgave 3
Vis at $8^n + 2^n + 1$ ikke er et kvadrattal for noget naturligt tal n.

Opgave 4 Et naturligt tal n, som højst er 500, har den egenskab at når man vælger et tal m tilfældigt blandt tallene $1, 2, 3, \dots, 499, 500$, så er sandsynligheden $\frac{1}{100}$ for at m går op i n.
Bestem den størst mulige værdi af n. (Georg Mohr-Konkurrencen 2006)

Opgave 5 Lad n være produktet af samtlige tal mindre end en million med præcis 9 divisorer.
Vis at n er et kvadrattal.

Opgave 6
For hvilke ikke-negative hele tal n går 1599 op i $46^n + 34^n - 7^n - 5^n$?
(Vink: $1599 = 39 \cdot 41$).

Opgave 7
Antag at $p + q$ er delelig med 9 for to hele tal p og q. Vis at $p^9 + q^9$ er delelig med 81.

Opgave 8
Antag at $n \geq 3$ er et ulige tal. Vis at $1^n + 2^n + \cdots n^n$ er delelig med n^2.

Løsninger til talteoriopgaver

Opgave 1
De kvadratsike rester modulo 4 er 0 og 1, og de kvadratiske rester moudlo 8 er 0, 1 og 4. (Dette vises ved at bestemme a^2 for samtlige principale rester a.)

Opgave 2
Summen af kvadraterne af tre på hinanden følgende tal er kongruent med 2 modulo 3, og da 2 ikke er kvadratisk rest modulo 3, er denne sum ikke et kvadrattal.
Summen af kvadraterne af fire på hinanden følgende tal er kongruent med 2 modulo 4, og da 2 ikke er kvadratisk rest modulo 4, er denne sum ikke et kvadrattal.
Summen af kvadraterne af fem på hinanden følgende tal er kongruent med 2 eller 3 modulo 4, og da hverken 2 eller 3 er kvadratiske rester modulo 4, er denne sum ikke et kvadrattal.
Summen af kvadraterne af seks på hinanden følgende tal er kongruent med 3 modulo 4, og da 3 ikke er kvadratisk rest modulo 4, er denne sum ikke et kvadrattal.

Opgave 3
Hvis n er ulige, er

$$8^n + 2^n + 1 = 2^{3n} + 2^n + 1 \equiv 2 + 2 + 1 \equiv 2 \pmod 3,$$

Og da 2 ikke er kvadratisk rest modul 3, er $8^n + 2^n + 1$ ikke et kvadrattal for noget ulige naturligt tal n.
Hvis n er lige, sættes $n = 2m$, og $8^n + 2^n + 1 = 2^{6m} + 2^{2m} + 1$. Tallet $2^{6m} + 2^{2m} + 1$ kan ikke være et kvadrattal da det ligger mellem kvadraterne af to på hinanden følgende tal:

$$(2^{3m})^2 < 2^{6m} + 2^{2m} + 1 < (2^{3m} + 1)^2.$$

Opgave 4
Hvis sandsynligheden er $\frac{1}{100}$ for at et tilfældigt valgt tal m blandt tallene $1, 2, 3, \ldots, 499, 500$ går op i n, må n have præcis 5 divisorer. Et tal med primfaktoropløsning $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}$ har $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_i)$ divisorer, dvs. $n = p^4$ for et primtal p. Det størst mulige n med den ønskede egenskab er derfor $n = 3^4 = 81$, da $5^4 > 500$.

Opgave 5
Tal med netop 3^2 divisorer må ifølge sætningen om antallet af divisorer være på formen p^8 eller p^2q^2 hvor p og q er primtal. Et sådant tal er derfor altid et kvadrattal, og produktet af sådanne tal er derfor også et kvadrattal.

Opgave 6
Et tal er deleligt med $1599 = 39 \cdot 41$ netop hvis det er deleligt med både 39 og 41.

$$S = 46^n + 34^n - 7^n - 5^n \equiv 7^n + (-5)^n - 7^n - 5^n \equiv ((-1)^n - 1)5^n \pmod{39},$$

dvs. at S er delelig med 39 netop når n er lige.

$$S = 46^n + 34^n - 7^n - 5^n \equiv 5^n + (-7)^n - 7^n - 5^n \equiv ((-1)^n - 1)7^n \pmod{39},$$

dvs. at S er delelig med 41 netop når n er lige. Dermed er S delelig med 1599 netop når n er lige.

Opgave 7
Da $p+q$ er delelig med 9, ved vi at hvis $\frac{p^9+q^9}{p+q}$ er et helt tal som er delelig med 9, da må p^9+q^9 være delelig med $9^2 = 81$. Ved at udnytte at at $p \equiv -q \pmod 9$, får vi

$$\frac{p^9+q^9}{p+q} = p^8 - p^7q + p^6q^2 - p^5q^3 + p^4q^4 - p^3q^5 + p^2q^6 - pq^7 + q^8 \equiv 9 \cdot p^8 \equiv 0 \pmod 9.$$

Opgave 8
Vi viser først at hvis $a+b$ er delelig med n, da er a^n+b^n delelig med n^2. Ved at udnytte at n er ulige, samt at $a \equiv -b \pmod n$ får vi

$$\frac{a^n+b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1} \equiv n \cdot a^{n-1} \equiv 0 \pmod n,$$

og dermed $a^n + b^n \equiv 0 \pmod{n^2}$. Nu er

$$1^n + 2^n + \cdots + n^n =$$

$$(1^n + (n-1)^n) + (2^n + (n-2)^n) + \cdots + (\left(\frac{n-1}{2}\right)^n + \left(\frac{n+1}{2}\right)^n) + n^n \equiv 0 \pmod{n^2}.$$