Funktionalligninger
Alle opgaver er fra Den Nordiske Matematikkonkurrence

Opgave 1 (1993)
Lad F være en voksende reel funktion defineret for alle x, $0 \leq x \leq 1$, som opfylder følgende:

i) $F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2}$,

ii) $F(1-x) = 1 - F(x)$.

Bestem $F\left(\frac{173}{1993}\right)$ og $F\left(\frac{1}{13}\right)$.

Opgave 2 (1996)
Lad f være en reel funktion defineret for alle positive hele tal n. Antag at f for et helt positivt tal a opfylder at $f(a) = f(1995)$, $f(a+1) = f(1996)$, $f(a+2) = f(1997)$ og

$$f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1} \text{ for alle positive hele tal } n.$$

i) Vis at $f(n+4a) = f(n)$ for alle positive hele tal n.

ii) Bestem den mindst mulige værdi af a.

Opgave 3 (1999)
Funktionen f er defineret for alle ikke negative hele tal n og opfylder betingelsen

$$f(n) = \begin{cases} f(f(n+11)), & \text{hvis } n \leq 1999 \\ n-5, & \text{hvis } n > 1999. \end{cases}$$

Bestem samtlige løsninger til $f(n) = 1999$.

Opgave 4 (2000)
En reel funktion f er defineret for x, $0 \leq x \leq 1$, således at $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ og

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(z)-f(y)}{f(y)-f(x)} \leq 2 \text{ for alle } 0 \leq x < y < z \leq 1 \text{ hvor } z - y = y - x.$$

Vis at

$$\frac{1}{7} \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \leq \frac{4}{7}.$$

Opgave 5 (2001)
Lad f være en begrænset reel funktion defineret for alle reelle tal således at

$$f\left(x+\frac{1}{3}\right) + f\left(x+\frac{1}{2}\right) = f(x) + f\left(x+\frac{5}{6}\right)$$

for alle reelle tal x.
Vis at f er periodisk.