

”Terminsprøve”

Onsdag d. 28. februar 2007

Opgave 1

I en trekant ABC med areal 1 indtegnes medianerne. Midtpunktet af medianen m_a kaldes for A^* , midtpunktet af medianen m_b kaldes for B^* , og midtpunktet af medianen m_c kaldes for C^* .

Bestem arealet af trekant $A^*B^*C^*$.

Opgave 2

På et af felterne på et $n \times m$ -skakbræt anbringes en sort brik, på hvert af de resterende felter anbringes en hvid brik.

To spillere A og B skiftes nu til at trække efter følgende regler: Et træk består i at fjerne enten alle tilbageværende brikker i en række eller alle tilbageværende brikker i en søjle. Hvis man tager den sorte brik, har man tabt.

For hvilke værdier af de naturlige tal n og m og for hvilke placeringer af den sorte brik kan A spille på en sådan måde at han med sikkerhed kan vinde hvis det er ham der har første træk?

Opgave 3

Vis at der findes en mængde bestående af 2007 naturlige tal så at summen af elementerne i enhver ikke-tom delmængde ikke er et kvadrattal.

Opgave 4

Lad n være et helt positivt tal, og lad a_1, a_2, \dots, a_n være n vilkårlige positive reelle tal. Vis at der findes mindst et $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ således at

$$\frac{k(k+1)}{a_k} > \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} .$$