

Løsninger til ”terminsprøve”

Onsdag d. 28. februar 2007

Opgave 1

Først viser vi at siderne i trekant $A^*B^*C^*$ er parallelle med siderne i trekant ABC . Indtegn midtpunktstransversalen m gennem siderne AB og AC . Denne midtpunktstransversal går gennem A^* og er parallel med BC . Punkterne B^* og C^* ligger lige langt fra linjen m og linjen gennem B og C , og dermed er siden B^*C^* parallel med BC . Tilsvarende gælder for de andre to sider i trekant $A^*B^*C^*$. Vi har nu at trekant ABC og trekant $A^*B^*C^*$ er ensvinklede.

Da midtpunktstransversalen m deler siden AB på midten, må linjen gennem B^* og C^* dele siden AB i forholdet $1 : 3$, dvs. at $|AB| = 4|A^*B^*|$. Dermed er forholdet mellem sidelængderne i trekant ABC og trekant $A^*B^*C^*$ $\frac{1}{4}$, dvs. at forholdet mellem arealerne er $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$. Arealet af trekant $A^*B^*C^*$ er derfor $\frac{1}{16}$.

Opgave 2

Vi beviser at A har en vindende strategi netop når tallene n og m har forskellige paritet. Placeringen af den sorte brik er ligegyldig.

Kald antallet af disponible rækker, hhv. søjler, for r , hhv. s . Bemærk at hvert træk nedbringer tallet $r + s$ med 1. Fra start er $r + s = n + m$. Tallet $r + s$ har altså samme paritet som $n + m$ hver gang det er A's tur. Så længe $r + s > 2$, kan spillerne vælge at gå uden om den række og den søjle hvori den sorte brik befinder sig. Hvis ingen af spillerne har begået den dumhed at tage den sorte brik undervejs, er på et tidspunkt $r + s = 2$. Den spiller der har tur, taber. Hvis $n + m$ er lige, er det således A der taber, hvis $n + m$ er ulige, er det B.

Opgave 3

1. metode Vi påstår at mængden $A = \{2^1, 2^3, 2^5, \dots, 2^{2 \cdot 2007 - 1}\}$, som består af 2007 tal, har den angivne egenskab. Lad M være en vilkårlig ikke-tom delmængde af A . Summen s af elementerne i M har formen $s = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_k}$, hvor eksponenterne i_1, i_2, \dots, i_k er ulige, og vi kan antage at $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Så er $s = 2^{i_1}(1 + 2^{i_2 - i_1} + \dots + 2^{i_k - i_1})$. Dette tal har 2 som primfaktor et ulige antal gange og kan derfor ikke være et kvadrattal.

2. *metode* Vi viser ved induktion den mere generelle påstand at der for alle naturlige tal findes en mængde med den angivne egenskab. Induktionens start: Der findes en mængde bestående af 1 naturligt tal med den angivne egenskab. Vi kan f.eks. tage mængden $\{2\}$. Induktionsskridtet: Antag at der findes en n -mængde A med den angivne egenskab. Lad s betegne den størst forekommende sum af elementer i en delmængde af A . Betragt mængden $B = A \cup \{s^2 + 1\}$. Mængden B har $n + 1$ elementer, og vi påstår at den har den angivne egenskab. Betragt en vilkårlig delmængde af B . Enten består den af lutter elementer fra A , og i så fald er ifølge induktionsantagelsen summen af dens elementer ikke et kvadrattal. Eller også indeholder den elementet $s^2 + 1$, og i så fald vil summen af dens elementer mindst være $s^2 + 1 > s^2$ og højst (da s var størst mulige sum fra A) $(s^2 + 1) + s < (s + 1)^2$, dvs. summen vil befinde sig strengt mellem de to på hinanden følgende kvadrattal s^2 og $(s + 1)^2$ og dermed ikke selv være et kvadrattal.

Opgave 4

Vi beviser påstanden indirekte. Antag at udsagnet er falskt. Da gælder for alle $k = 1, 2, \dots, n$ at

$$\frac{1}{a_k} \leq \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} .$$

Nu summerer vi denne ulighed over $k = 1, 2, \dots, n$. Bemærk først at

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 .$$

Dermed er

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} ,$$

hvilket er en modstrid.