TALTEORI
Ligninger og det der ligner.

Disse noter forudsætter et grundlæggende kendskab til talteori som man kan få i Marianne Terps og Peter Trosborgs noter om talteori.
Noterne vil primært introducere forskellige opgaveteknikker især med fokus på ligninger og det der ligner.

Når man skal løse ligninger med heltallige løsninger, er det en stor fordel hvis det er muligt at skrive dem på en form hvor et produkt af faktorer hvor de ubekendte indgår, er lig med et helt tal. Det hele tal kan man primfaktoropløse, og på denne måde får man overblik over de mulige værdier af faktorerne.

0.1 Eksempel

Hvis vi for eksempel skal finde samtlige heltallige løsninger til ligningen

$$n^2 + 389 = m^2,$$

er det en god ide at omskrive til $389 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$. Da 389 er et primtal, er det nemt at se at faktorerne $m+n$ og $m-n$ er ± 389 og ± 1. Løsningerne er derfor $(m,n) = (\pm 195, \pm 194)$. Hvis 389 ikke var et primtal, fik vi lidt flere muligheder, men stadig kun endeligt mange.

1 Omskrivninger ved kvadratsætningerne

Først skal vi se på ligninger og opgaver der ligner, som kan løses ved at omskrive vha. kvadratsætningerne ligesom i eksemplet ovenfor.

1.1 Eksempel

Hvis vi fx ønsker at bestemme alle primtal p og q som opfylder $p^2 - 2q^2 = 1$, kan vi omskrive og få $(p+1)(p-1) = 2q^2$. Da højresiden er lige, må p være ulige. Dermed vil 4 gå op i venstresiden, og dette giver at q er lige, dvs. $q = 2$. Her af ses at $p = 3$.

1.2 Opgave

Bestem alle par (x, y) af naturlige tal som opfylder $x^6 = y^2 + 53$.

1.3 Opgave

I en retvinklet trekant, hvori alle sidelængder er hele tal, har den ene katete længde 1994. Bestem længden af hypotenusen. (Georg Mohr-Konkurrencen 1994)

1.4 Opgave

Vis at hvis der for to hele tal a og b gælder at $a^2 + b^2 + 9ab$ er delelig med 11, da er også $a^2 - b^2$ delelig med 11. (Georg Mohr-Konkurrencen 2004)

Omskrivning vha. af kvadratsætninger kan også bruges i andre talteoretiske sammenhænge end ligninger fx hvis man skal vise at tal på en bestemt form har bestemte egenskaber.

1.5 Eksempel

Hvis vi ønsker at vise at a^4+a^2+1, hvor a er et naturligt tal større end 1, er et sammensat tal, kan vi omskrive på følgende måde.

$$a^4+a^2+1=(a^2+1)^2-a^2=(a^2+1+a)(a^2+1-a).$$

Heraf fremgår det klart at a^4+a^2+1 er et sammensat tal når $a>1$.

1.6 Opgave

Lad n og m være to hele tal som kan skrives som sum af to kvadrattal.
Vis at da kan også mn skrives som sum af to kvadrattal.

1.7 Opgave

For hvilke naturlige tal n er $m=n^4+4$ et primtal?

2 Andre typer omskrivninger

Det er ikke altid at man kan omskrive vha. kvadratsætninger, nogle gange skal der andre omskrivninger til.

2.1 Eksempel

Hvis vi fx vil bestemme samtlige par af naturlige tal x og y som er løsning til ligningen

$$2x^2+5y^2=11(xy-11),$$

kan vi omskrive på følgende måde

$$(2x-y)(5y-x)=11^2.$$

Pointen er som tidligere at vi nu har et produkt hvor de ubekendte indgår, på den ene side af lighedstegnet og et tal på den anden. Det er ikke altid helt let at finde en omskrivning, men i dette eksempel kan man se at hvis det skal lykkes, skal produktet være på formen $(ax-y)(by-x)$, og herefter er det ikke så svært at finde a og b. Når vi først har omskrevet, kan vi løse ligningen således.
Hvis begge faktorer er negative, er $2x<y<\frac{1}{5}x$, hvilket er en modstrid. Dermed er begge faktorer positive. Det er nu nemt at tjekke mulighederne igennem, og man får at den eneste løsning er $x=14$ og $y=27$. (Baltic Way 1998)

2.2 Opgave

Bestem alle par af hele tal (x,y) som opfylder ligningen

$$y^2(x^2+1)+x^2(y^2+16)=448.$$

2.3 Opgave

Bestem samtlige par af naturlige tal (x,y) som opfylder ligningen

$$x^2+2x-xy-3y=1997.$$

(Georg Mohr-Konkurrencen 1997)

2.4 Opgave

Vis at hvis $a^n - 1$ er et primtal for hele tal a og n med $n > 1$, da er $a = 2$ og n er et primtal.

3 Restklasseregning og kvadratiske rester

Mange ligninger kan løses ved restklasseregning i stedet for omskrivninger. Det svære er som regel at gennemskue hvilket tal det kan betale sig at regne modulo.

Først ser vi på kvadratiske rester

3.1 Definition

En restklasse a modulo n er en kvadratisk rest hvis ligningen

$$x^2 \equiv a \bmod n$$

har en heltallig løsning.

3.2 Eksempel

De kvadratiske rester modulo 8 er netop resterne 0, 1 og 4, mens fx 5 ikke er kvadratisk rest modulo 8 da ligningen $x^2 \equiv 5 \bmod 8$ ikke har nogen løsninger.

3.3 Eksempel

Det er ofte en god ide at få reduceret problemstillingen til en ligning af typen $x^2 \equiv a \bmod n$, da ikke alle rester er kvadratiske rester modulo n.
Hvis vi ønsker at bestemme samtlige heltallige løsninger til ligningen

$$15x^2 - 7y^2 = 9,$$

er det mest oplagt at forsøge at regne modulo 3, 5 eller 7.
Først prøver vi at regne modulo 3. Dette giver at y er delelig med 3, og vi kan sætte $y = 3y_1$. Nu er $15x^2 - 63y_1^2 = 9$ hvilket reduceres til $5x^2 - 21y_1^2 = 3$. Dette giver på samme måde $45x_1^2 - 21y_1^2 = 3$ som reduceres til $15x_1^2 - 7y_1^2 = 1$. Regner vi nu modulo 3, skal $y_1^2 \equiv -1 \pmod 3$, men -1 er ikke kvadratisk rest modulo 3. Ligningen har derfor ingen heltallige løsninger.
Hvis vi i stedet regner modulo 5, får vi $3y^2 \equiv 4 \pmod 5$. Ganger vi med 2 på begge sider, giver dette $y^2 \equiv 3 \pmod 5$, men 3 er ikke kvadratisk rest modulo 5.
I dette tilfælde kan man altså både regne modulo 3 og modulo 5, men det er langt det hurtigste at regne modulo 5. I praksis må man forsøge sig lidt frem.

3.4 Opgave

Bestem alle par (x, y) af naturlige tal som opfylder $x^2 - 3y^2 = 17$.

3.5 Opgave

Bestem alle par (x, y) af naturlige tal som opfylder $6(x! + 3) = y^2 + 5$.

3.6 Opgave

Findes der fire forskellige positive heltal med den egenskab at produktet af vilkårlige to lagt til 2006, giver et kvadrattal? (Baltic Way 2006)

3.7 Opgave

Antag at n er et naturligt tal, og at $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ er de fire mindste naturlige tal som går op i n. Bestem samtlige hele tal n som opfylder at

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

Det er ikke altid at der indgår kvadrater så man kan benytte kvadratiske rester, men moduloregning er stadig et stærkt redskab.

3.8 Eksempel

I denne opgave vil vi bestemme samtlige par af naturlige tal n og m for hvilke

$$1 + 3^n = 2^m.$$

Da der står en potens af 2 på den ene side af lighedstegnet, regner vi først modulo 8. Hvis n er lige, er $3^n \equiv 1 \pmod 8$, og hvis n er ulige, er $3^n \equiv 3 \pmod 8$. Blot ved at se på ligningen modulo 8 kan man altså konstatere at der ikke findes løsninger når $m > 2$. Det ses nu let at den eneste løsning er $n = 1$ og $m = 2$.

3.9 Opgave

To naturlige tal har summen 2002.
Kan 2002 gå op i de to tals produkt? (Georg Mohr-Konkurrencen 2002)

3.10 Opgave

I 1001-nats eventyr fortæller sultanen sin kone at hun skal hænges med mindre hun kan finde et naturligt tal n så

$$1^{1001} + 2^{1001} + \ldots + n^{1001}$$

er delelig med $n + 2$.
Overlever hun?

3.11 Opgave

Bestem det mindste naturlige tal k således at $k = 19^n - 5^m$ for naturlige tal n og m. (Baltic Way 1999)

3.12 Opgave

Bestem samtlige heltallige løsninger til ligningen $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

4 Løsniner

Opgave 1.2 Vi har at

$$x^6 - y^2 = (x^3 + y)(x^3 - y) = 53.$$

Da 53 er et primtal, må $x^3 + y = 53$ og $x^3 - y = 1$. Dermed er $x = 3$ og $y = 26$.

Opgave 1.3 Kald den ukendte katete a og hypotenusen c. Da er

$$2^2 997^2 = 1994^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a).$$

Da $c + a$ og $c - a$ har samme paritet, må de begge være lige. Vi har derfor

$$997^2 = \frac{c + a}{2}\frac{c - a}{2},$$

hvor 997 er et primtal. Heraf ses at $\frac{a+c}{2} = 997^2$ og $\frac{a-c}{2} = 1$. Dette giver $c = 1 + 997^2 = 994010$.

Opgave 1.4 Da $a^2 + b^2 + 9ab = (a - b)^2 + 11ab$, er $a - b$ delelig med 11 da 11 er et primtal. Dermed er også $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ delelig med 11.

Opgave 1.6 Lad $n = a^2 + b^2$ og $m = c^2 + d^2$. Vi skal nu vise at også nm er en sum af to kvadrater, og det gør vi ved at regne og omskrive vha. af kvadratsætninger.

$$nm = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac + bd)^2 - 2abcd + (ad - bc)^2 + 2abcd.$$

Heraf ses at også nm kan skrives som sum af to kvadrater.

Opgave 1.7

$$m = n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

For alle $n > 1$ er m derfor ikke et primtal, og for $n = 1$ er $m = 5$.
(Bemærk at der generelt gælder at $n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2nm + 2m^2)(n^2 - 2nm + 2m^2)$.)

Opgave 2.2 Først omskriver vi således:

$$\begin{aligned} y^2(x^2 + 1) + x^2(y^2 + 16) &= 448 \\ 2x^2y^2 + 16x^2 + y^2 &= 448 \\ 2x^2(y^2 + 8) + y^2 + 8 &= 456 \\ (2x^2 + 1)(y^2 + 8) &= 2^3 \cdot 3 \cdot 19. \end{aligned}$$

Da $2x^2 + 1$ er ulige, må $2x^2 + 1$ være lig med $1, 3, 19$ eller 57. Af dette ser man at $x = 0, \pm 1, \pm 3$. Ved at efterprøve disse muligheder får man følgende otte løsninger $(\pm 1, \pm 12)$ og $(\pm 3, \pm 4)$.

Opgave 2.3 Da $xy + 3y = y(x + 3)$ og $x^2 + 2x = (x + 3)(x - 1) + 3$, kan ligningen omskrives til

$$1994 = (x + 3)(x - 1) - y(x + 3) = (x + 3)(x - 1 - y).$$

De eneste faktoriseringer af tallet 1994 er $1994 \cdot 1$ og $997 \cdot 2$, og da $x + 3$ er den største af faktorerne, får vi derfor løsningerne $(x, y) = (1991, 1989)$ og $(x, y) = (994, 991)$.

Opgave 2.4 Antag at $a^n - 1$ er et primtal. Vi udnytter at

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1),$$

til at indse at $a = 2$. Hvis n er et sammensat tal $n = uv$, $u, v > 1$, da er

$$2^n - 1 = (2^u)^v - 1 = (2^u - 1)((2^u)^{v-1} + (2^u)^{v-2} + \ldots + 2^u + 1).$$

Dermed må n være et primtal, hvis $2^n - 1$ er et primtal.

Opgave 3.4 Da -1 ikke er kvadratisk rest modulo 3, har ligningen ingen løsninger.

Opgave 3.5 Bemærk først at y må være ulige, dvs. $y^2 \equiv 1 \pmod 8$.
For $x \geq 4$ er $6(x!+3) \equiv 6 \cdot 3 \equiv 2 \pmod 8$, og $y^2 + 5 \equiv 6 \pmod 8$, dvs. der ingen løsninger er. Hermed ses det let at $(2,5)$ og $(3,7)$ er de eneste løsninger.

Opgave 3.6 Produktet af to lige tal er altid deleligt med 4, dvs. produktet af to lige tal lagt til 2006 har rest 2 modulo 4, men 2 er ikke kvadratisk rest modulo 4. Hvis der findes fire tal med den ønskede egenskab, må tre af disse derfor være ulige. Blandt tre ulige tal findes to som har samme rest modulo 4. Produktet af disse to har rest 1 modulo 4, og dermed har produktet lagt til 2006 rest 3 modulo 4, men 3 er ikke kvadratisk rest modulo 4. Derfor findes der ikke fire tal med den ønskede egenskab.

Opgave 3.7 Antag at $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.
Hvis n er ulige, vil $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 = 0 \pmod 4$, hvilket er umuligt.
Hvis n er lige, vil $d_1 = 1$ og $d_2 = 2$, og dermed

$$n = 1 + 0 + d_3^2 + d_4^2 \not\equiv 0 \pmod 4,$$

dvs. at 4 ikke går op i n.
Samlet ser vi at $d_3 = p$, og at $d_4 = 2p$ eller $d_4 = q$ hvor p og q er ulige primtal. Hvis $d_4 = q$, vil $n \equiv 3 \pmod 4$, hvilket er umuligt. Dermed er $n = 1 + 4 + p^2 + 4p^2 = 5p^2 + 5 = 5(p^2 + 1)$. Af dette ses at $p = 5$, dvs. at $n = 5(5^2+1) = 130$ er det eneste tal der opfylder det ønskede.

Opgave 3.9 Svaret er nej, og dette bevises indirekte. Antag at $a + b = 2002$, og at ab er delelig med 2002. Da er $0 \equiv ab = a(2002 - a) \equiv -a^2 \pmod{2002}$, dvs. at a^2 er delelig med 2002. Desuden er $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ kvadratfrit, dvs. at a er er delelig med 2002, hvilket er en modstrid da $0 < a < 2002$.

Opgave 3.10 Nej, hun overlever ikke. Regner vi modulo $n+2$, er $i^{1001} + (n+2-i)^{1001} \equiv 0 \pmod{n+2}$.
Hvis n er ulige, giver ligningen

$$1^{1001} + 2^{1001} + \ldots + n^{1001} \equiv 1^{1001} \pmod{n+2}.$$

Hvis n er lige, giver ligningen

$$1^{1001} + 2^{1001} + \ldots + n^{1001} \equiv 1^{1001} + \Big(\frac{n+2}{2}\Big)^{1001} \pmod{n+2}.$$

Vi ved at $(\frac{n+2}{2})^{1001} \equiv 0 \pmod{n+2}$ eller $(\frac{n+2}{2})^{1001} \equiv \frac{n+2}{2} \pmod{n+2}$. Dermed findes der ikke noget n med den ønskede egenskab.

Opgave 3.11 For $n = m = 1$ er $k = 14$. Antag at $k < 14$.
Hvis n er ulige, er sidste ciffer i k 4, dvs. $k = 4$. Men $19^n - 5^m$ har aldrig rest 1 modulo 3. Hvis n er lige, er sidste ciffer i k 6, dvs. $k = 6$. Hvis vi regner modulo 3, får vi at $0 \equiv 19^n - 5^m \equiv 1 - 2^m \pmod 3$, dvs. at også m er lige. Sæt nu $n = 2n_1$ og $m = 2m_1$. Da er

$$6 = (19^{n_1})^2 - (5^{m_1})^2 = (19^{n_1} - 5^{m_1})(19^{n_1} + 5^{m_1}),$$

men denne ligning har ingen løsninger.
Dermed er $k = 14$.

Opgave 3.12 Hvis $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$, skal enten et eller tre af tallene x, y og z være lige. Antag at kun et af tallene er lige, fx $x = 2x_1$. Da vil $y^2 + z^2 = 4x_1yz - 4x_1^2 \equiv 0 \pmod 4$, hvilket er en modstrid. Dermed er alle tre tal lige. Ved at sætte $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ og $z = 2z_1$ får vi $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$. Ved samme argumentation følger nu at x_1, y_1, z_1 er lige, og da dette kan gentages vil x, y, z være delelige med 2^n for alle naturlige tal n. Dermed er den eneste løsning $x = y = z = 0$.