Opgaver

Kapitel 1 fra "Bogen"

Georg Mohr-Konkurrencens vinderseminar

1. udgave 2. oplag 2007

Dette kapitel indeholder opgaver af ret varierende sværhedsgrad. De letteste ligger i forlængelse af, hvad der i gymnasiet kræves af den gode elev, de sværeste er så vanskelige, at kun de færreste vil kunne løse dem uden hjælp.

Opgaverne løses ved en blanding af gode ideer og matematisk håndværk. Opgaverne er til dels ordnet efter det sidste, men selv om en overskrift peger på et bestemt matematisk hjælpemiddel, vil der som regel være en del vanskeligheder, der skal overvindes, før løsningen er færdig. Og løsningen er naturligvis først komplet, når samtlige detaljer er klaret.

De fleste af beviserne er direkte beviser. For en enkelt opgave føres et indirekte bevis, ligesom induktionsbevis også benyttes.

For ca. halvdelen af opgaverne er der anført et bevis. Af hensyn til læsere, som selv først vil prøve kræfter med disse opgaver, er opgavernes ordlyd anført umiddelbart neden for.

Med hensyn til opgaverne uden løsning kan det være irriterende ikke at kende den. Prøv evt. så at løse disse opgaver i samarbejde med andre: opgaver man ikke kan løse alene, lader sig da af og til løse i samarbejde med andre. Din matematiklærer (hvis du har sådan en) vil sikkert gerne hjælpe i det omfang, tiden tillader det.

Ellers er sidste udvej at kontakte Georg Mohr Arbejdsgruppen.

Opgaver med bevis

Her kommer så opgaverne:

Opgave 1. Bevis, at der for positive tal a, b, c og d gælder

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da$$

og vis, at lighed kun gælder for $a = b = c = d$.

Opgave 4. I et koordinatsystem er givet de to punkter $A(0, 10)$ og $B(0, 40)$, som fastlægger et linjestykke AB på andenaksen.

Fra hvilket punkt X på førsteaksen med positiv førstekoordinat betragtes linjestykket AB under den største vinkel?

Opgave 6. I trekant ABC betegnes længden af højderne h_a, h_b og h_c og r er radius i trekantens indskrevne cirkel.

Bevis, at trekanten er ligesidet hvis og kun hvis

$$h_a + h_b + h_c = 9r.$$

Opgave 7. Vis, at blandt alle trekanter med en indskreven cirkel med radius 1, har den ligesidede trekant den mindste omkreds.

Opgave 11. Vis, at uanset hvordan 15 punkter afsættes inden for en cirkel med radius 2 (cirkelranden er medregnet), vil der eksistere en cirkel med radius 1 (cirkelranden medregnet), som indeholder mindst 3 af de 15 punkter.

Opgave 14. Lad $p > 4$ være et primtal. Bevis, at 360 går op i tallet

$$(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2).$$

Opgave 16. Lad x, y og z være hele tal.

Bestem samtlige løsninger til ligningen

$$3^x + 1 = 5^y + 7^z.$$

Opgave 18. Givet n forskellige hele tal $a_1, a_2, \ldots, a_n$, hvor $n > 1$. Vis, at der ikke findes noget m'tegradspolynomium $(0 < m < n)$ med heltallige koefficienter og højestegradkoefficient 1, der går op i polynomiet $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$.

Opgave 19. Vis, at der for n positive tal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ altid gælder, at

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

og at lighed kun gælder for $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Aritmetiske opgaver

En del opgaver, ligninger og uligheder, lader sig elegant løse ved at bruge den kendsgerning, at et kvadrat er større end eller lig nul. Som et eksempel ser vi på:

Opgave 1. Bevis, at der for positive tal a, b, c og d gælder

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da$$

og vis, at lighed kun gælder for $a = b = c = d$.

Bevis.

$$\begin{aligned}
&2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 \geq 2ab + 2bc + 2cd + 2da && \Leftrightarrow \\
&(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) + (d^2 - 2da + a^2) \geq 0 && \Leftrightarrow \\
&(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

hvor lighed kun gælder for $a = b = c = d$. □

Regn evt. selv følgende opgaver:

Opgave 2. Vis, at det for alle positive tal x gælder, at

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

og at lighed kun gælder for $x = 1$.

Opgave 3. Lad x og y være positive tal med $x + y = 1$.
Vis, at

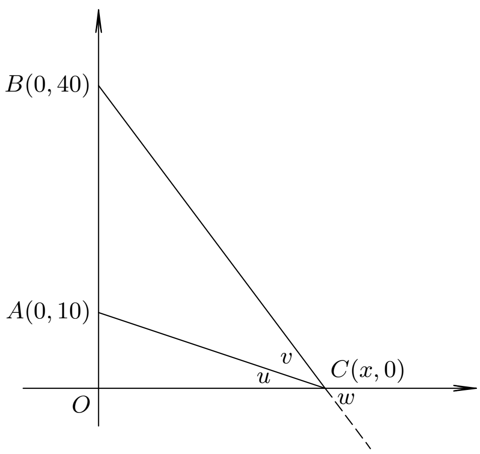
$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

Differentialregning

Opgaverne 2 og 3 var eksempler på opgaver, som lod sig regne ved at benytte aritmetiske omformninger. Men de kunne naturligvis også være løst ved at benytte differentialregning. Følgende opgave er et typisk eksempel på en opgave, der løses ved differentialregning:

Opgave 4. I et koordinatsystem er givet de to punkter $A(0, 10)$ og $B(0, 40)$, som fastlægger et linjestykke AB på andenaksen.

Fra hvilket punkt X på førsteaksen med positiv førstekoordinat betragtes linjestykket AB under den største vinkel?



Bevis. Afsæt punkterne $O(0, 0)$, $A(0, 10)$, $B(0, 40)$ og $C(x, 0)$, $x > 0$.

$$\angle OCB = w, \quad \angle OCA = u, \quad \angle ACB = \angle OCB - \angle OCA = w - u = v.$$

De retvinklede trekanter giver:

$$\tan w = \frac{40}{x}, \quad \tan u = \frac{10}{x}$$

Nu bruges formlen:

$$\tan v = \tan(w - u) = \frac{\tan w - \tan u}{1 + \tan w \cdot \tan u}$$

(Her anvendes en formel, der ikke bruges så ofte. Man kan godt slippe igennem uden denne formel, men regnearbejdet vil så i de fleste tilfælde vokse noget.)

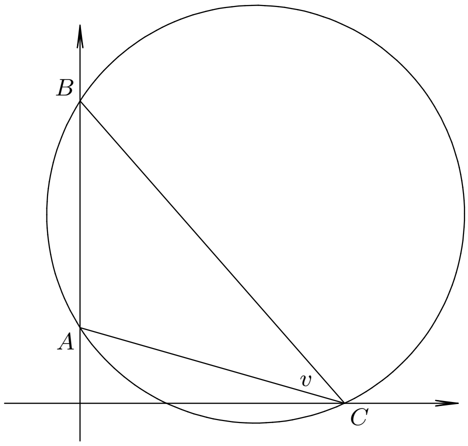
$$\tan v = \frac{\frac{40}{x} - \frac{10}{x}}{1 + \frac{40}{x} \cdot \frac{10}{x}} = \frac{\frac{30}{x}}{1 + \frac{400}{x^2}} = \frac{30x}{x^2 + 400}$$

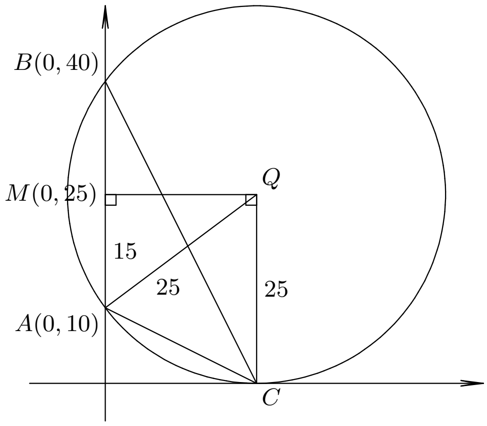
Vinkel v er størst, når $\tan v = \frac{30x}{x^2+400} = f(x)$ er størst:

$$f'(x) = \frac{30(x^2 + 400) - 30x \cdot 2x}{(x^2 + 400)^2} = \frac{30(400 - x^2)}{(x^2 + 400)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20$ og $f'(x)$-fortegnsvariationen viser, at $x = 20$ er maksimumssted.

...men opgaven kan også løses sådan:





Tegn en cirkel gennem A, B og C. Vinkel v er størst når buen AB eller korden AB er relativt størst, altså når cirklen er mindst. Cirklen skal altså tangere x-aksen i C. Centrum Q ligger i samme højde som midtpunktet M af AB, $M = (0, 25)$. $\triangle AMQ$ er retvinklet med $|AM| = 15$, $|AQ| = |QC| = 25$ og Pythagoras giver $x = |OC| = |MQ| = 20$. $\square$

Herefter kunne det være nærliggende at prøve med:

Opgave 5. En mand i en robåd befinder sig i punktet A i 2 kilometers afstand fra en retlinet kyststrækning. Ved først at ro ind til punktet P og derefter spadsere langs kysten når han frem til punktet B, som ligger i en afstand af 5 km fra C, der er punktet på kysten nærmest A. Mandens ro-hastighed er 3 km i timen og hans spadsere-hastighed er 5 km i timen.

Afgør, hvor P skal placeres mellem C og B, så manden på kortest mulig tid kommer fra A til B.

Geometriopgaver

Opgave 4 kunne opfattes som en overgang fra differentialopgaver til geometriske opgaver, og igen er det naturligvis sådan, at også geometriopgaver ofte løses ved at benytte andre matematiske discipliner. Den følgende geometriopgave regnes ved rent aritmetiske omformninger:

Opgave 6. I trekant ABC betegnes længden af højderne h_a, h_b og h_c og r er radius i trekantens indskrevne cirkel.

Bevis, at trekanten er ligesidet hvis og kun hvis

$$h_a + h_b + h_c = 9r.$$

Bevis.

$$2s = a + b + c, \quad rs = T \Leftrightarrow \frac{r}{2T} = \frac{1}{2s} = \frac{1}{a+b+c}, \quad a \cdot h_a = 2T \Leftrightarrow \frac{h_a}{2T} = \frac{1}{a}.$$

$$\begin{aligned} h_a + h_b + h_c = 9r &\Leftrightarrow \frac{h_a}{2T} + \frac{h_b}{2T} + \frac{h_c}{2T} = 9 \cdot \frac{r}{2T} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{9}{a+b+c} \\ &\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} = 9 \\ &\Leftrightarrow \ldots \text{ en del udregninger } \ldots \\ &\Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 = 0, \end{aligned}$$

hvoraf det ønskede resultat aflæses. □

I forbindelse med geometriopgaver må det varmt anbefales at tegne en brugbar figur. Som et eksempel på en vanskelig geometriopgave, der kan løses ad mange forskellige veje, kommer her:

Opgave 7. Vis, at blandt alle trekanter med en indskreven cirkel med radius 1, har den ligesidede trekant den mindste omkreds.

Det her benyttede bevis anvender meget elegant Jensens ulighed.

Bevis. $x + y + z$ er lig den halve omkreds. O er den indskrevne cirkels centrum. De halve centervinkler (se figuren) kaldes α, β og γ:

$$0 < \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ, \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Fra $\triangle AOH$ fås $\tan\alpha = \frac{x}{1} = x$ og analogt fås $\tan\beta = y$ og $\tan\gamma = z$. Ved addition fås:

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = x + y + z = s.$$

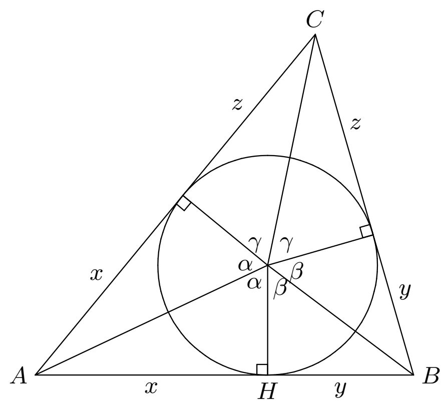
Da tan er konveks på $]0^\circ; 90^\circ[$ (se (*) nedenfor), kan Jensens ulighed benyttes:

$$\frac{1}{3}(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma) \geq \tan\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

hvor lighed kun gælder hvis $\alpha = \beta = \gamma$ $(= 60^\circ)$. Den halve omkreds s og dermed hele omkredsen er altså mindst, hvis trekanten er ligesidet og mindsteværdien er $2s_{\min} = 6\sqrt{3}$.

(*) Bevis for at tan er konveks:

$$\tan''(x) = (1 + \tan^2 x)' = 2\tan x(1 + \tan^2 x) > 0 \quad \text{for } x \in]0^\circ; 90^\circ[\,.$$ □



Som mere overkommelige geometriopgaver kan nævnes:

Opgave 8. I det indre af en ligesidet trekant ABC med sidelængde a er givet et punkt P. Fra dette punkt er den vinkelrette afstand til siderne AB, BC og CA henholdsvis u, v og w.

Bevis, at $2(u+v+w) = a\sqrt{3}$.

Opgave 9. Længden af diameteren AB i en cirkel er et to-cifret halt tal (i titalsystemet). Byttes om på cifrene fås længden af den på AB vinkelrette korde CD.

Afstanden fra skæringspunktet mellem AB og CD til cirklens centrum O er et positivt, rationalt tal.

Bestem længden af diameteren AB.

Og her er en geometriopgave, hvor der faktisk ikke skal "regnes" overhovedet:

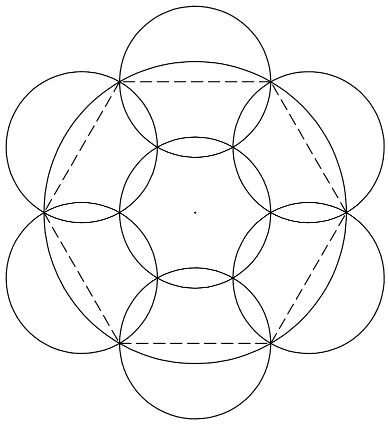
Opgave 10. Lad C være en cirkel og P et givet punkt i planen. Enhver linje gennem P, som skærer C i to punkter fastlægger en korde. Vis, at samtlige kordemidtpunkter ligger på en cirkel.

Skuffeprincippet

Populært udtrykt siger "skuffeprincippet", at skal nogle ting lægges i skuffer, så vil mindst to ting havne i samme skuffe, hvis der er flere ting, end der er skuffer. I de engelsksprogede lande kaldes dette for "the pidgeon-hole principle". Denne ret simple kendsgerning kan føre til løsning af vanskelige matematiske opgaver:

Opgave 11. Vis, at uanset hvordan 15 punkter afsættes inden for en cirkel med radius 2 (cirkelranden er medregnet), vil der eksistere en cirkel med radius 1 (cirkelranden medregnet), som indeholder mindst 3 af de 15 punkter.

Beviset føres ved at overdække den oprindelige cirkel med 7 cirkler med radius 1. Den første cirkel har samme centrum som den oprindelige. I den oprindelige cirkel indskrives en regulær 6-kant og med denne 6-kants sider som diametre, tegnes de sidste 6 cirkler.



Det overlades til læseren at eftervise, at foreningsmængden af de 7 cirkler indeholder den oprindelige.

Ifølge skuffeprincippet må en af de 7 cirkler indeholde 3 eller flere af de 15 punkter.

Ved en lignende fremgangsmåde kan følgende opgave løses:

Opgave 12. I et kvadrat med sidelængde 1 befinder sig 51 punkter.

Bevis, at der uanset punkternes placering, findes en cirkel med radius $\frac{1}{7}$, så denne cirkel i sit indre indeholder mindst 3 af punkterne.

I næste opgave skal der tænkes i lidt andre baner, men igen giver skuffeprincippet en elegant løsning:

Opgave 13. Lad n være et naturligt tal. Vis, at når $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er naturlige tal (ikke nødvendigvis indbyrdes forskellige), så vil der findes en delsum s

$$s = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k},$$

hvor $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ således, at s er delelig med n.

Talteori

I talteoretiske opgaver er det ofte en god ide at interessere sig for faktorer eller divisorer, ofte primfaktorer. En ikke alt for vanskelig opgave er følgende:

Opgave 14. Lad $p > 4$ være et primtal. Bevis, at 360 går op i tallet

$$(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2).$$

Bevis. $p > 4$ er et primtal. Sæt $P = (p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$. $2 \cdot 4 = 8$ går op i $(p-1)(p+1)$, 3^2 går op, da 3 går op i 2 af faktorerne og desuden må 5 gå op (der er jo 5 på hinanden følgende hele tal i produktet). Produktet $8 \cdot 5 \cdot 9 = 360$ går altså op i P. □

Herefter kan du selv prøve kræfter med:

Opgave 15. Tallet 1980 er interessant. Det viser dig, at 1980 går op i

$$192021222324\ldots757677787980.$$

Bevis dette.

Der findes en del opgaver, hvor argumentationen bliver overskuelig ved at regne med restklasser, altså regne "modulo n". Her er et par eksempler:

Opgave 16. Lad x, y og z være hele tal.
Bestem samtlige løsninger til ligningen

$$3^x + 1 = 5^y + 7^z.$$

Bevis. Det ses forholdsvis let, at x, y og z må være ikke-negative. Desuden indses, at hvis ét af de tre tal er 0, må alle tre være 0, altså $x = y = z = 0$ er en løsning.

Er x, y og z positive heltal regnes modulo 6:

$$3^x + 1 \equiv 5^y + 7^z \pmod 6 \Leftrightarrow 3^x + 1 \equiv (-1)^y + 1^z \pmod 6$$

Her gælder $3^x \equiv 3 \pmod 6$ og $1^z \equiv 1 \pmod 6$, som giver

$$3 + 1 \equiv (-1)^y + 1 \pmod 6 \Leftrightarrow (-1)^y \equiv 3 \pmod 6,$$

som ikke kan løses. Eneste løsning er altså den trivielle $x = y = z = 0$. □

Opgave 17. Find alle primtal p, for hvilke det gælder:

$$2^p + p^2 \text{ er et primtal.}$$

Polynomier

Her er en vanskelig (meget svær) opgave, hvor en del af løsningen foretages ved den ret simple konklusion, at hvis "et polynomium har alt for mange nulpunkter, så er det nulpolynomiet". Dette er jo ikke nogen heldig matematisk formulering, men beviset for den stillede opgave afslører, hvad argumentationen mere præcist drejer sig om.

Opgave 18. Givet n forskellige hele tal $a_1, a_2, \ldots, a_n$, hvor $n > 1$. Vis, at der ikke findes noget m'tegradspolynomium ($0 < m < n$) med heltallige koefficienter og højestegradkoefficient 1, der går op i polynomiet $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$.

Bevis. Beviset føres indirekte. Vi antager altså, at der findes et polynomium $g(x)$ af den ønskede art, der går op i $f(x)$. Vi har så $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ og $1 \leq \text{grad}(g) \leq n - 1$. Det er nu essentielt, at her *må også $h(x)$ have heltallige koefficienter*. Dette indses f.eks. ved formelt at gange $g(x)$ og $h(x)$ sammen (kald koefficienterne for $a_i, \ldots, a_0$ og $b_j, \ldots, b_0$ med $i + j = n$) og sammenligne produktets koefficienter med $f(x)$'s koefficienter startende med koefficienterne til x^n, derpå koefficienterne til x^{n-1} osv. Det er desuden klart, at $1 \leq \text{grad}(h) \leq n - 1$.

For alle a_i gælder $f(a_i) = -1$ og dermed $g(a_i) \cdot h(a_i) = -1$. De hele koefficienter i $g(x)$ og $h(x)$ sikrer nu, at $g(a_i)$ og $h(a_i)$ er hele tal, og da produktet er -1 må $g(a_i) = -h(a_i) = \pm 1$. Og nu følger et flot ræsonnement: polynomiet $g(x) + h(x)$ er derfor 0 for alle a_i. Samtidig gælder $1 \leq \text{grad}(g + h) \leq n - 1$, og da antallet af nulpunkter dermed er større end graden (her kommer den præcise formulering) må $g(x) + h(x)$ være nulpolynomiet altså identisk 0.

$$g(x) + h(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = -g(x), \quad \text{og} \quad f(x) = g(x) \cdot h(x) = -(g(x))^2.$$

Men hermed er vi nået til en modstrid, idet $f(x)$ går mod uendelig for x gående mod uendelig og $-(g(x))^2$ klart går mod minus uendelig for x gående mod uendelig.

Vores antagelse om eksistens af $g(x)$ må derfor være forkert. □

Induktionsbeviser

I hjørnet med talteori er der en del sætninger, der vises ved induktion. Det efterfølgende forudsætter derfor kendskab til induktionsaksiomet (eller til anvendelse af induktionsbeviser).

Det er ikke så svært at få fat i en bog, der omtaler dette aksiom.

Opgaven kan (selvfølgelig) også løses uden brug at induktion — her kommer den:

Opgave 19. Vis, at der for n positive tal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ altid gælder, at

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

og at lighed kun gælder for $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Bevis. Det oprindelige udsagn (at påstanden gælder for det naturlige tal n) kaldes $P(n)$.

For $n = 1$ er påstanden $P(1)$: $a_1 \cdot \frac{1}{a_1} \geq 1^2$, som jo er sand.

For $n = 2$ er $P(2)$:

$$(a_1 + a_2)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \geq 2^2 \Leftrightarrow 1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)} \geq 2,$$

som er sandt ifølge resultatet fra opgave 2. Lighed gælder her kun for $a_1 = a_2$.

Antag nu, at påstanden er sand for n (at $P(n)$ er et sandt udsagn). Vi ønsker at vise, at under denne forudsætning er også $P(n+1)$ et sandt udsagn:

$$\begin{aligned}
P(n+1): \quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1})\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) &\geq (n+1)^2 \qquad \Leftrightarrow \\
((a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1})\left(\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) + \frac{1}{a_{n+1}}\right) &\geq (n+1)^2 \qquad \Leftrightarrow \\
(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) + \left(\frac{a_1}{a_{n+1}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) & \\
+ \left(\frac{a_{n+1}}{a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + 1 &\geq n^2 + 2n + 1 \qquad \Leftrightarrow \\
(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) & \\
+ \left(\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1}\right) + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &\geq n^2 + 2n,
\end{aligned}$$

som er sandt, da det første produkt er større end eller lig med n^2 ifølge induktionsantagelsen, og de efterfølgende parenteser: $\left(\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1}\right)$ hver er større end eller lig 2, ifølge opgave 2.

Det ses desuden, at lighed kun gælder hvis alle a_i er lige store.

Ifølge induktionsaksiomet gælder påstanden $P(n)$ for ethvert naturligt tal n. □

Her er til slut et par induktionsopgaver, så du selv kan prøve teknikken. Prøv at give opgaverne en sådan udformning, at induktionsideen træder klart frem:

Opgave 20. Bevis, at 23 går op i $T_n = 5^{2n+1} + 9 \cdot 2^{n+1}$, hvor n er et positivt helt tal.

Opgave 21. Om to reelle tal x og y gælder, at

$$x + y = u \quad \text{og} \quad xy = v.$$

Vis, at $x^n + y^n$ kan skrives som en hel rationel funktion af u og v af n'te grad i u, hvis koefficienter alle er hele tal ($n \geq 2$).

($x^n + y^n$ skal altså skrives på formen $\sum_{0 \leq i,j \leq n} A_{i,j} u^i v^j$, hvor $A_{i,j}$ er hele tal).