Matematisk induktion

1 Induktionsbeviser

Sætninger der udtaler sig om hvad der gælder for alle naturlige tal $n \in N$, kan undertiden bevises ved *matematisk induktion.*

Idéen bag induktionsbeviser er enkel: i stedet for at bevise sætningen for hvert enkelt n for sig fra en ende af (hvorved man jo skulle igennem uendelig mange beviser før man havde klaret alle de naturlige tal), beviser man bare to ting: a) at påstanden gælder for $n = 1$, og b) at man altid kan komme videre, dvs. at det for alle $n \in N$ gælder at *hvis* påstanden er sand for n, *så* er den også sand for $n + 1$.

At dette faktisk er en gyldig bevistype, er egentlig et *aksiom*, *induktionsaksiomet*, som er en del af fundamentet for den matematik vi beskæftiger os med til daglig.

For at vise hvordan et induktionsbevis typisk forløber, ser vi på vi følgende

Sætning. For alle naturlige tal $n \in N$ gælder formlen

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .$$

Bevis. Vi beviser sætningen ved induktion. For $n = 1$ lyder sætningens påstand $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, og det er jo sandt. Hermed har vi sikret *induktionens start.*

Lad herefter n være et vilkårligt naturligt tal. Vi vil bevise at *hvis* formlen gælder for n, dvs. at *hvis*

$$(*) \quad 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ,$$

så gælder formlen også for $n + 1$, dvs. at så gælder

$$(**) \quad 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad .$$

Vi ser på venstre side af dette udtryk, udnytter *induktionsantagelsen* $(*)$ og regner videre:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\ [n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad .$$

Hermed har vi bevist $(**)$ ud fra $(*)$, dvs. at *induktionsskridtet* er fuldført. Dermed er sætningen er bevist. $\diamond$

2 Opgaver

Formlerne i de første opgaver nedenfor er nyttige og velkendte (og kan i øvrigt bevises på mange andre måder end ved induktion).

Opgave 1 (Summen af de n første naturlige tal) Bevis ved induktion formlen

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad n \in N \quad .$$

Opgave 2 (Summen af de n første ulige naturlige tal) Bevis ved induktion formlen

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2 \quad , \quad n \in N \quad .$$

Opgave 3 (Summen af en endelig kvotientrække) Lad $q \neq 1$ være et tal. Bevis ved induktion at

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad , \quad n \in N \quad .$$

Opgave 4 (Antallet af delmængder af en n-mængde) Bevis ved induktion at antallet af delmængder af en n-mængde, $n \in N$, er 2^n.

Opgave 5 Lad der være givet et liniestykke med længden 1, og lad n være et naturligt tal. Bevis at man med passer og lineal kan konstruere et liniestykke af længden $\sqrt{n}$.

Det er naturligvis en stor fordel at vide hvad man stiler efter at bevise. I praksis kender man ikke altid resultatet på forhånd. I de næste opgaver skal man først gætte en formel.

Opgave 6 (Summen af de n første kubiktal.) Gæt ved at prøve med små værdier af n et generelt udtryk for

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 \quad .$$

Bevis derefter formlen ved induktion.

Opgave 7 Dag 1 om morgenen anbringes en abe på det nederste trin af en uendelig høj stige. Hver dag klatrer aben først op til trinnet dobbelt så højt oppe som det trin den startede på om morgenen, og derpå yderligere et trin op. På hvilket trin befinder aben sig om morgenen den n'te dag?

Induktionens start behøver ikke at være $n = 1$.

Opgave 8 Bevis at vinkelsummen i en n-kant, $n \geq 3$, er $(n-2)180°$.

Også induktionsantagelsen kan varieres. Undertiden benyttes i induktionsskridtet ikke bare at påstanden antages at gælde for n, men at den antages at gælde for alle (eller udvalgte) tal op til og med n.

Opgave 9 Betragt *Fibonacci-tallene*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$$

der er defineret ved at $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ samt

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad , \quad n \in N \quad .$$

Bevis ved induktion *Binets formel*, som siger at

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}} \quad , \quad n \in N \quad .$$

Somme tider kan induktion bruges i opgaver der som udgangspunkt slet ikke handler om alle de naturlige tal. De følgende opgaver bliver faktisk lettere hvis man gætter på at påstanden nok holder for alle naturlige tal, og derefter går efter at bevise dette mere generelle resultat.

Opgave 10 Lad a være et tal med den egenskab at tallet

$$a + \frac{1}{a}$$

er et helt tal. Bevis at også

$$a^{19} + \frac{1}{a^{19}}$$

er et helt tal.

Opgave 11 I et firma med 107 ansatte overvåger man hinanden på følgende måde: For ethvert par af ansatte gælder at enten overvåger den ene den anden, eller også overvåger den anden den ene. Bevis at der findes en ansat P med den egenskab at enhver anden person enten overvåger P eller overvåger en person der overvåger P.

Løsninger

Opgave 1 Vi skal ved induktion bevise at

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad n \in N \quad .$$

Induktionens start: For $n = 1$ lyder påstanden $1 = 1 \cdot 2/2$, hvilket er sandt. Induktionsskridtet: Antag at $1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1)/2$. Så er $1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = n(n+1)/2 + (n+1) = (n(n+1) + 2(n+1))/2 = (n+1)(n+2)/2$ som ønsket. Ved induktion følger nu at sætningen gælder for alle $n \in N$.

Opgave 2 Vi skal ved induktion bevise at

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2 \quad , \quad n \in N \quad .$$

Induktionens start: For $n = 1$ lyder påstanden $1 = 1^2$, hvilket er sandt. Induktionsskridtet: Antag at $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$. Heraf fås $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ som ønsket. Ved induktion følger nu at sætningen gælder for alle $n \in N$.

Opgave 3 Lad $q \neq 1$ være et tal. Vi skal ved induktion bevise at

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad , \quad n \in N \quad .$$

Induktionens start: For $n = 1$ lyder påstanden $1 + q = (1 - q^2)/(1 - q)$, hvilket er sandt (kvadratsætning). Induktionsskridtet: Antag at $1 + q + q^2 + ... + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$. Heraf fås $1 + q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1} = (1 - q^{n+1})/(1 - q) + q^{n+1} = (1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q))/(1 - q) = (1 - q^{n+2})/(1 - q)$ som ønsket. Ved induktion følger nu at sætningen gælder for alle $n \in N$.

Opgave 4 Vi skal ved induktion bevise at antallet af delmængder af en n-mængde, $n \in N$, er 2^n. Induktionens start: Påstanden er korrekt for $n = 1$, da antallet af delmængder af en mængde med 1 element er 2 (nemlig hele mængden og den tomme mængde). Induktionsskridtet: Antag at antallet af delmængder af en n-mængde er 2^n. Lad os betragte en $(n+1)$-mængde A, og lad a være et element i denne. Ved optælling af delmængder af A skelner vi mellem delmængder *uden* a som element og delmængder *med* a som element. Af de førstnævnte er der ifølge induktionsantagelsen 2^n (nemlig samtlige delmængder af n-mængden $A \backslash \{a\}$). Af de sidstnævnte er der, ligeledes ifølge induktionsantagelsen, også antallet 2^n (nemlig samtlige delmængder af $A \backslash \{a\}$, hver tilføjet elementet a). Ialt er der således $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ delmængder som ønsket. Ved induktion følger nu at sætningen gælder for alle $n \in N$.

Opgave 5 Lad der være givet et liniestykke med længden 1, og lad n være et naturligt tal. Vi skal bevise at at man med passer og lineal kan konstruere et liniestykke af længden $\sqrt{n}$.

Vi beviser ved induktion at påstanden gælder for ethvert $n \in N$. Induktionens start: For $n = 1$ er der intet at vise, da det givne liniestykke har længden

$1 = \sqrt{1}$. Induktionsskridtet: Antag at et liniestykke med længden $\sqrt{n}$ kan konstrueres. Med passer og lineal kan en retvinklet trekant med kateterne 1 og $\sqrt{n}$ konstrueres. Hypotenusen i denne er $\sqrt{n+1}$ (Pythagoras). Hermed er det ønskede vist.

Opgave 6 Vi skal gætte og ved induktion bevise et generelt udtryk for $1^3 + 2^3 + ... + n^3$. For de første værdier af n har vi $1^3 = 1$, $1^3 + 2^3 = 9$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$. Vi genkender kvadrattallene på højre side og gætter ud fra dette på at

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 \quad , \quad n \in N \quad ,$$

altså (idet vi udnytter formlen fra opgave 1) at

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad , \quad n \in N \quad .$$

Vi beviser denne formel ved induktion. Induktionens start: For $n = 1$ har vi allerede set at formlen passer. Induktionsskridtet: Antag at $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = n^2(n+1)^2/4$. Heraf fås $1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = n^2(n+1)^2/4 + (n+1)^3 = (n+1)^2(n^2 + 4(n+1))/4 = (n+1)^2(n+2)^2/4$ som ønsket. Hermed er induktionsbeviset fuldført.

Opgave 7 Dag 1 om morgenen anbringes en abe på det nederste trin af en uendelig høj stige. Hver dag klatrer aben først op til trinnet dobbelt så højt oppe som det trin den startede på om morgenen, og derpå yderligere et trin op. Vi skal finde et udtryk for det trin a_n som aben befinder sig på om morgenen den n'te dag. Vi har åbenbart $a_1 = 1$, og generelt $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $n \in N$. Da $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$, gættes på at der gælder $a_n = 2^n - 1$. Dette gæt eftervises ved induktion. Induktionens start: For $n = 1$ har vi allerede set at formlen passer. Induktionsskridtet: Antag at $a_n = 2^n - 1$. Så er $a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ som ønsket. Hermed er formlen bevist.

Opgave 8 Vi beviser ved induktion at vinkelsummen i en n-kant, $n \geq 3$, er $(n-2)180°$. Induktionens start: For $n = 3$ er resultatet velkendt (vinkelsummen i en trekant er $180°$). Induktionsskridtet, $n \geq 3$: Antag at vinkelsummen af en n-kant er $(n-2)180°$. Betragt en $(n+1)$-kant. Den kan (overvej!) opdeles i en trekant og en n-kant. Vinkelsummen bliver derved $(n-2)180° + 180° = (n-1)180°$ som ønsket.

Opgave 9 Vi skal bevise at

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}} \quad , \quad n \in N$$

for F_n givet ved at $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ samt $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \in N$.
Beviset føres ved induktion. Vi sætter $a = (1 + \sqrt{5})/2$, $b = (1 - \sqrt{5})/2$ og skal bevise at $\sqrt{5}\ F_n = a^n - b^n$. Bemærk at tallene a og b opfylder $a^2 = a + 1$ og $b^2 = b + 1$ samt $a - b = \sqrt{5}$. Induktionens start: For $n = 1$ er $F_1 = 1$, og udtrykket $a^1 - b^1 = a - b = \sqrt{5}$, altså ok. For $n = 2$ er $F_2 = 1$, og

$a^2 - b^2 = (a+1) - (b+1) = a - b = \sqrt{5}$, altså ok. Induktionsskridtet, $n \geq 2$: Vi antager at formlen gælder for $n-1$ og for n, og vil vise at den gælder for $n+1$. Vi antager altså at $\sqrt{5}\ F_{n-1} = a^{n-1} - b^{n-1}$ og $\sqrt{5}\ F_n = a^n - b^n$. Heraf fås ved addition $\sqrt{5}\ F_{n+1} = \sqrt{5}\ F_n + \sqrt{5}\ F_{n-1} = a^n - b^n + a^{n-1} - b^{n-1} = a^{n-1}(a+1) - b^{n-1}(b+1) = a^{n-1}a^2 - b^{n-1}b^2 = a^{n+1} - b^{n+1}$. Hermed er induktionsbeviset ført.

Opgave 10 Lad a være et tal med den egenskab at tallet $a + 1/a$ er et helt tal. Vi skal bevise at så er også $a^{19} + 1/a^{19}$ et helt tal. Vi vil ved induktion bevise den mere generelle påstand at der for alle $n \in N$ gælder at $a^n + 1/a^n$ er et helt tal. Induktionens start (for $n = 1$ og $n = 2$): For $n = 1$ er der intet at vise. For $n = 2$ bemærker vi først at $(a + 1/a)^2$ er et helt tal, hvoraf, da $(a + 1/a)^2 = a^2 + 1/a^2 + 2$, også $a^2 + 1/a^2$ er et heltal. Induktionsskridtet (for $n \geq 2$): Antag at $a^k + 1/a^k$ er heltal for alle $k \leq n$. Nu er $(a+1/a)(a^n+1/a^n) = a^{n+1} + 1/a^{n-1} + a^{n-1} + 1/a^{n+1} = (a^{n+1} + 1/a^{n+1}) + (a^{n-1} + 1/a^{n-1})$. Da venstresiden er et produkt af hele tal, og da $a^{n-1} + 1/a^{n-1}$ er helt ifølge induktionsantagelsen, må også $a^{n+1} + 1/a^{n+1}$ være et helt tal. Hermed er påstanden bevist.

Opgave 11 I et firma med 107 ansatte overvåger man hinanden på følgende måde: For ethvert par af ansatte gælder at enten overvåger den ene den anden, eller også overvåger den anden den ene. Bevis at der findes en ansat P med den egenskab at enhver anden person enten overvåger P eller overvåger en person der overvåger P.

Vi beviser mere generelt at påstanden gælder for enhver størrelse n af firmaet. Lad os skrive $x \to y$ for "x overvåger y". Lad os kalde en person P med den angivne egenskab for central.

Induktionens start: For $n = 1$ er påstanden tom. Induktionsskridtet: Antag at der for ethvert firma med n ansatte med parvis overvågning som beskrevet findes en central person. Betragt nu et firma M med $n + 1$ ansatte med parvis overvågning. Lad $Q \in M$. Delmængden $M_* = M \backslash \{Q\}$ opfylder parvis overvågning. I M_* findes derfor en central person P. Sæt $A = \{x \in M_* | x \to P\}$. Der nu to muligheder. a) Hvis $Q \to P$ eller $Q \to x$ for et eller andet $x \in A$, er P brugbar som central person i hele M. b) Hvis omvendt $P \to Q$ og $x \to Q$ for alle $x \in A$, er Q brugbar som central person i hele M. Hermed er påstanden bevist.