

Geometri 2

Disse opgaver er en fortsættelse af **Geometri** og går som disse primært ud på at bevise et udvalg af de mange sætninger man ofte skal benytte i geometriopgaver til internationale konkurrencer.

Sætninger om arealet af en trekant samt radius i dens indskrevne og omskrevne cirkel

I det følgende ser vi på en trekant ABC hvor s betegner den halve omkreds, r er radius i den indskrevne cirkel, R er radius i den omskrevne cirkel, og T er arealet.

Areal og radius i den indskrevne cirkel

Vis at

$$T = rs.$$

Herons formel

Herons formel siger at

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bevis Herons formel. (Hint: Benyt cosinusrelationen og $T = \frac{1}{2}bc \sin A$, og regn).

Radius i den omskrevne cirkel

Vis at

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Areal og radius i den omskrevne cirkel

Vis at

$$4RT = abc.$$

Opgaver

Opgave 1

I et kvadrat $ABCD$ er indskrevet en cirkel med radius R . En tangent til cirklen skærer linjestykkerne AB og AD i henholdsvis P og Q . Radius i den indskrevne cirkel til trekant APQ kaldes r . Udtryk arealet af trekant APQ vha. r og R .

Opgave 2

Firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med radius R . Diagonalerne står vinkelret på hinanden, og deres skæringspunkt kaldes E .

Vis at

$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = 4R^2.$$

Opgave 3

Vis at der findes uendeligt mange trekanter hvor sidelængderne er tre på hinanden følgende hele tal, og arealet af trekanten er et helt tal. (NMC 1995)

Opgave 4

Vis for en trekant ABC at

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1.$$

Her er r radius i den indskrevne cirkel, og R er radius i den omskrevne cirkel.

Opgave 5

Vis for en trekant ABC at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2rR}.$$

Her er r som før radius i den indskrevne cirkel, og R er radius i den omskrevne cirkel.