

Geometri 2

Løsningsskitser

Sætninger om arealet af en trekant samt radius i dens indskrevne og omskrevne cirkel

Areal og radius i den indskrevne cirkel

Kald centrum for den indskrevne cirkel for I . Arealet af trekant ABI er da $\frac{1}{2}rc$ da r er højden, og c er grundlinjen. Tilsvarende er arealet for trekant ACI og BCI henholdsvis $\frac{1}{2}rb$ og $\frac{1}{2}ra$. Da arealet af trekant ABC netop er summen af arealerne af disse tre trekanter, er

$$T = \frac{1}{2}(a + b + c)r = sr.$$

Herons formel

Ifølge cosinusrelationen er

$$(2bc)^2 \cos^2 A = (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Vi ved at $4T = 2bc \sin A$, og ved kvadrering får vi $16T^2 = (2bc)^2 \sin^2 A$. Desuden er $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$. Samlet giver dette

$$\begin{aligned} 16T^2 &= (2bc)^2 - (2bc)^2 \cos^2 A \\ &= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= ((b + c)^2 - a^2)(a^2 - (b - c)^2) \\ &= (a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \\ &= 16s(s - a)(s - b)(s - c). \end{aligned}$$

Dermed er Herons formel bevist.

Radius i den omskrevne cirkel

Kald centrum for den omskrevne cirkel for O og midtpunktet af siden AC for H . Da O er skæringspunktet for midtnormalerne, står OH vinkelret på AC . Ifølge sætningen om center- og periferivinkler er $\angle AOC = 2\angle B$. I alt er trekant OHC en retvinklet trekant hvor $\angle HOC = \angle B$ og $\angle OHC = 90^\circ$. Dermed er

$$\sin B = \frac{\frac{1}{2}b}{R} = \frac{b}{2R}.$$

Dette giver ifølge sinusrelationen

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Areal og radius i den omskrevne cirkel

Lad igen O være centrum for den omskrevne cirkel, og lad diameteren gennem A skære cirklen yderligere i punktet D . Da er trekant ABD ret, da $\angle ABD$ spænder over diameteren. Lad H være fodpunktet for højden i trekant ABC på siden b . Vi ved nu at

$\angle ADB = \angle ACB$ da de spænder over samme bue. Trekkanterne ADB og BCH er derfor ensvinklede, og der gælder

$$\frac{2R}{c} = \frac{a}{|HB|}.$$

Dette giver

$$|HB| = \frac{ac}{2R}.$$

Nu kan vi finde arealet:

$$T = \frac{1}{2}|HB|b = \frac{1}{2} \frac{ac}{2R} b = \frac{abc}{4R}.$$

Dette giver

$$4RT = abc$$

som ønsket.

Opgaver

Opgave 1

Kald cirkelns røringsspunkt med AB for E , med AD for F og med tangenten for G . Der gælder da at $|EP| = |PG|$ og $|GQ| = |QF|$. Dermed er trekantens omkreds $|AP| + |AQ| + |PQ| = |AE| + |AF| = 2R$. Arealet af en trekant er givet ved den halve omkreds gange radius i den indskrevne cirkel, dvs. arealet er Rr .

Opgave 2

Da diagonalerne står vinkelret på hinanden, er

$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = |AB|^2 + |CD|^2.$$

Kald vinkel $\angle ADB$ for u og vinkel $\angle DAC$ for v . Da er $\angle DBC = v$ da de spænder over samme bue, og $v + u = 90^\circ$, dvs. $\sin v = \cos u$. To gange radius for den omskrevne cirkel i en trekant er lig med længden af den ene side divideret med sinus til den modstående vinkel. Benyttes dette på trekant ABD og trekant BCD giver dette $|AB| = 2R \sin u$ og $|CD| = 2R \sin v$. Dette giver som ønsket

$$|AB|^2 + |CD|^2 = (2R)^2(\sin^2 u + \sin^2 v) = 4R^2(\sin^2 u + \cos^2 u) = 4R^2.$$

Opgave 3

Lad $n \geq 3$, og lad $n - 1$, n og $n + 1$ være sidelængderne i en trekant. Den halve omkreds er da $\frac{3n}{2}$. Ifølge Herons formel er arealet

$$T_n = \sqrt{\frac{3n}{2} \left(\frac{3n}{2} - n + 1\right) \left(\frac{3n}{2} - n\right) \left(\frac{3n}{2} - n - 1\right)} = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{3}{4}(n^2 - 4)}.$$

For $n = 4$ er $T = 6$ så vi har mindst en trekant der opfylder betingelserne. Vi viser nu at vi ud fra en trekant der opfylder betingelserne, kan konstruere endnu en trekant med den ønskede egenskab og større sidelængde. Dette giver nemlig at der findes uendeligt mange. Lad n være et lige tal, $n \geq 4$, og antag at $\frac{3}{4}(n^2 - 4)$ er et kvadrattal. Betragt trekanten med sidelængderne $m - 1$, m og $m + 1$ hvor $m = n^2 - 2$. Da er $m > n$, m er lige, og

$$\frac{3}{4}(m^2 - 4) = \frac{3}{4}(m - 2)(m + 2) = \frac{3}{4}(n^2 - 4)n^2.$$

Dermed er

$$T_m = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{3}{4}(m^2 - 4)}$$

et helt tal. Der findes altså uendeligt mange trekanter med de ønskede egenskaber.

Opgave 4

Ifølge cosinusrelationen er

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) + 2abc}{2abc} \\ &= \frac{8(s - a)(s - b)(s - c)}{2abc} + 1 \\ &= \frac{8\frac{T^2}{s}}{8RT} + 1 \\ &= \frac{r}{R} + 1. \end{aligned}$$

Opgave 5

Bemærk først at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{a + b + c}{abc}.$$

Kald arealet af trekanten for T . Da er $a + b + c = \frac{2T}{r}$ og $abc = 4RT$. Vi har nu

$$\frac{a + b + c}{abc} = \frac{2T}{r4RT} = \frac{1}{2rR}.$$

som ønsket.