

Geometri

Disse opgaver går primært ud på at bevise et udvalg af de mange sætninger man ofte skal benytte i geometriopgaver til internationale konkurrencer, da langt de fleste af jer ikke er blevet præsenteret for disse sætninger med bevis i gymnasiet.

Sætninger om trekanter

Vinkelhalveringslinjer

Bevis at de tre vinkelhalveringslinjer i en trekant går gennem centrum for den indskrevne cirkel.

Midtnormaler

Bevis at de tre midtnormaler i en trekant går gennem centrum for den omskrevne cirkel.

Medianer

Bevis at i en trekant går medianerne igennem samme punkt, og de deler hinanden i forholdet 1 : 2.

Cevas sætning

En linje fra vinkelspids til den modstående side (eller dens forlængelse) i en trekant kaldes en cevian. Fx er højder, medianer og vinkelhalveringslinjer alle cevianer.

Cevas sætning siger at cevianerne AA' , BB' og CC' (hvor A' ligger på BC eller dens forlængelse osv.), skærer hinanden i samme punkt, netop hvis

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1. \quad \star)$$

Bevis Cevas sætning fx vha. følgende hints:

Hvis cevianerne går gennem samme punkt P , gælder \star):

Benyt at hvis to trekanter har samme højde, da er forholdet mellem arealerne lig forholdet mellem grundlinjerne, til at vise at $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)}$. (Her betegner $T(\triangle ABC)$ arealet af trekanten).

Hvis \star) gælder, da går cevianerne gennem samme punkt:

Kald skæringspunktet mellem AA' og BB' for P , og vis at cevianen fra C gennem P er identisk med CC' da de deler siden AB i samme forhold.

Højder

Bevis at højderne i en trekant går gennem samme punkt. (Vink: Du kan fx benytte Cevas' sætning).

Sætninger om cirkler

Periferi-, center- og korde-tangentvinkler

Bevis at en centervinkel er dobbelt så stor som en periferivinkel der spænder over samme buelængde.

Bevis at to periferivinkler der spænder over samme buelængde, er lige store.

Bevis at en korde-tangentvinkel og en periferivinkel som spænder over samme buelængde som korden, er lige store.

Et punkts potens

Lad der være givet en cirkel og et punkt P som ikke ligger på cirklen. Lad en linje gennem P skære cirklen i to punkter A og B , og en anden linje gennem P skære cirklen i to punkter C og D .

Vis at da er $|PA||PB| = |PC||PD|$.

Indskrivelige firkanter

Bevis at en firkant er indskrivelig, altså at den har en omskreven cirkel, netop hvis summen af to modstående vinkler er 180° .

Ptolemæus' sætning

Antag at firkant $ABCD$ er indskrivelig.

Vis at

$$|AC||BD| = |AB||CD| + |BC||DA|.$$

(Vink: Indtegn punktet M på diagonalen BD så $\angle DCM = \angle ACB$).

Opgaver**Opgave 1**

Lad to cirkler C_1 og C_2 skære hinanden i punkterne A og B . Tangenten til C_1 gennem B skærer C_2 i punktet C , og tangenten til C_2 gennem B skærer C_1 i punktet D . Desuden oplyses at $|BC| = 3$ og $|BD| = 4$.

Bestem længden af AB .

Opgave 2

Tre givne cirkler C_1, C_2 og C_3 skærer hinanden i et fælles punkt S , C_1 og C_2 skærer hinanden i yderligere et punkt P , C_1 og C_3 skærer hinanden i yderligere et punkt Q , og C_2 og C_3 skærer hinanden i yderligere et punkt R .

Lad A være et punkt på cirkelbuen PQ (den del der ikke indeholder S). Linjen gennem A og P skærer C_2 i punktet B , og linjen gennem A og C skærer C_3 i C .

Vis at punkterne B , R og C ligger på linje.

Opgave 3

En halvcirkel med diameter AB bevæger sig langs en ret vinkel således at A bevæger sig langs det ene vinkelben, og B langs det andet. Vis at et fast punkt P på halvcirklen bevæger sig langs en ret linje.

Opgave 4

En ligesidet trekant ABC er indskrevet i en cirkel. Lad M være et vilkårligt punkt på cirkelbuen BC .

Vis at $|MA| = |MB| + |MC|$.