Løsninger til geometri

Sætninger om trekanter

Vinkelhalveringslinjer

Lad ABC være en trekant, tegn vinkelhalveringslinjerne fra A og B, og kald deres skæringspunkt for I. Da vinkelhalveringslinjerne er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til vinklens ben, må afstandene fra I til alle tre sider være lige store. Punktet I er dermed centrum for den indskrevne cirkel, og vinkelhalveringslinjen fra C vil på tilsvarende vis gå gennem I.

Midtnormaler

Lad ABC være en trekant, tegn midtnormalerne på AB og BC, og kald deres skæringspunkt for O. Da midtnormalen på AB er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til A og B, og midtnormalen på BC er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til B og C, må afstandene fra O til henholdsvis A, B og C være lige store. Punktet O er dermed centrum for den omskrevne cirkel, og midtnormalen på AC vil på tilsvarende vis gå gennem O.

Medianer

Lad ABC være en trekant, og kald medianernes fodpunkter på siderne a, b og c for henholdsvis M_a, M_b og M_c. Medianerne AM_a og BM_b skærer hinanden i et punkt vi kalder O. Vi vil nu vise at de skærer hinanden i forholdet $1:2$, da det viser at alle tre medianer går gennem samme punkt og skærer hinanden i forholdet $1:2$. Da M_a og M_b er midtpunkter på henholdsvis BC og AC, er M_aM_b parallel med AB, dvs. at trekant ABC og trekant M_bM_aC er ensvinklede med forholdet $1:2$. Dermed er trekanterne ABO og M_aM_bO ensvinklede med samme forhold. Her af ses at AM_a og BM_b deler hinanden i forholdet $1:2$.

Cevas sætning

Antag at cevianerne går gennem samme punkt P. Ifølge sætningen om at hvis to trekanter har samme højde, da er forholdet mellem arealerne det samme som forholdet mellem grundlinjerne, får vi:

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{T(\triangle ABB')}{T(\triangle B'BC)} \quad \text{og} \quad \frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{T(\triangle APB')}{T(\triangle B'PC)}.$$

Dermed er

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)}.$$

Tilsvarende fås

$$\frac{|BC'|}{|C'A|} = \frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)} \quad \text{og} \quad \frac{|CA'|}{|A'B|} = \frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)}.$$

Samlet giver dette

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} \cdot \frac{|BC'|}{|C'A|} \cdot \frac{|CA'|}{|A'B|} = \frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)} \cdot \frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)} \cdot \frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)} = 1.$$

Antag nu at

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

Kald skæringspunktet mellem AA' og BB' for P, og betragt cevianen CD fra C gennem P. Da cevianerne AA', BB' og CD går gennem samme punkt, gælder

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

Samlet er $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC'|}{|C'B|}$, dvs. at $D = C'$, og dermed at cevianerne AA', BB' og CC' skærer hinanden i samme punkt P.

Højder
Kald fodpunkterne for højderne i trekant ABC for H_a, H_b og H_c. Da er

$$\cos A = \frac{|AH_b|}{c} = \frac{|AH_c|}{b} \text{ og dermed } \frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{c}{b}.$$

Tilsvarende gælder for de andre sider. Derfor er

$$\frac{|AH_b|}{|H_bC|}\frac{|BH_c|}{|H_cA|}\frac{|CH_a|}{|H_aB|} = \frac{abc}{abc} = 1.$$

Ifølge Cevas' sætning går højderne dermed gennem samme punkt.

Sætninger om cirkler

Periferi-, center- og korde-tangentvinkler
Lad v være en centervinkel og w en periferivinkel der begge spænder over buen AB. Kald centrum for C og punktet hvor w rører periferien, for D.
Antag først at vinkelbenene for vinkel v kun skærer vinkelbenene for w i punkterne A og B. Da deler diameteren gennem D vinklerne v og w i to vinkler som vi kalder hendholdsvis v_A og v_B og w_A og w_B. Trekant ACD er nu en ligebenet trekant med to lige store vinkler w_A, og den sidste vinkel er $180 - v_A$. Da vinkelsummen i en trekant er $180°$, er $2w_A = v_A$. Tilsvarende fås $2w_B = v_B$, dvs. $2w = v$.
Antag nu at w's ene vinkelben DB skærer v's vinkelben CB. Diameteren gennem D skærer da yderligere periferien i et punkt vi kalder for E. Ifølge det vi lige har vist, er $2\angle BDE = \angle BCE$ og $2\angle ADE = \angle ACE$, og dermed $2w = v$ som ønsket.

Da alle periferivinkler er halvt så store som den centervinkel der spænder over samme buelængde, er alle periferivinkler der spænder over samme buelængde, lige store.

At vise at en korde-tangentvinkel og en periferivinkel som spænder over samme buelængde som korden, er lige store, svarer nu til at vise at korde-tangentvinklen er halvt så stor som den centervinkel der spænder over korden. Da linjestykket fra centrum til tangentens røringspunkt står vinkelret på tangenten, ses dette let.

Et punkts potens
Hvis punktet P er et indre punkt, er trekant ABP og CDP ensvinklede ifølge sætningen om periferivinkler, hvilket giver det ønskede.
Hvis P er et ydre punkt, tegnes en tangent til cirklen gennem P, og røringspunktet kaldes Q. Nu er trekant APQ og trekant QPB ensvinklede ifølge sætningen om korde-tangentvinkler, dvs. at $|AP||BP| = |PQ|^2$. På tilsvarende vis fås $|CP||DP| = |PQ|^2$, hvilket giver det ønskede.

Indskrivelige firkanter
Antag at en firkant er indskrivelig. To modstående vinkler spænder da tilsammen over hele cirkelperiferien, og summen er derfor 180°.
Antag at der i en given firkant $ABCD$ gælder at summen af to modstående vinkler er 180°. Betragt nu den omskrevne cirkel for trekant ABC, og lad punktet E være skæringen mellem cirklen og linjen gennem C og D. Hvis firkanten er indskrivelig er D lig E. Vi ved at $\angle AEC = 180° - \angle ABC = \angle ADC$. Hvis D ligger uden for cirklen, vil $\angle ADC$ være mindre end $\angle AEC$, og hvis den ligger indenfor vil den være større. Dermed må $D = E$.

Ptolemæus' sætning
Antag at firkant $ABCD$ er indskrivelig, og lad M være punktet på diagonalen BD som opfylder at $\angle DCM = \angle ACB$. Der gælder at $\angle CDM = \angle CAB$ da de spænder over samme bue. Dermed er trekant CDM og trekant CAB ensvinklede med $|AB||DC| = |DM||AC|$. Tilsvarende er trekant CAD og trekant CBM ensvinklede med $|AD||CB| = |BM||AC|$. I alt giver dette

$$|AB||CD| + |BC||DA| = |AC|(|DM| + |MB|) = |AC||BD|.$$

Opgaver

Opgave 1
Ifølge sætningen om korde-tangentvinkler er trekant ABD og trekant ACB ensvinklede. Dette giver $|AB|^2 = |BC||BD| = 12$.

Opgave 2
Da summen af modstående vinkler i indskrivelige firkanter er 180°, er $\angle BRS = \angle APS = \angle SQC$ og $\angle SQC + \angle SRC = 180°$. Dermed er $\angle SRC + \angle SRB = 180°$ som ønsket.

Opgave 3
Kald punktet i den rette vinkels spids for O, og betragt en vilkårlig placering af diameteren AB. Da vinkel O er ret, ligger den på cirklen med AB som diameter, dvs. $\angle AOP = \angle ABP$ da de spænder over samme cirkelbue. Punktet P ligger derfor på en ret linje gennem O uanset placeringen af AB.

Opgave 4
Ifølge Ptolemæus' sætning gælder at $|MA||BC| = |MB||AC| + |MC||AB|$, og da trekant ABC er ligesidet fås $|MA| = |MB| + |MC|$.