Diskret matematik.

1 Paritet

I mange matematikopgaver er det en god ide at se på paritet dvs. hvornår en bestemt størrelse er henholdsvis lige og ulige.

1.1 Eksempel

I en hat ligger 1992 sedler med alle numre fra 1 til 1992. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differencen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kastes bort. Der fortsættes på denne måde indtil der kun er en seddel tilbage i hatten.
Vi vil nu vise, at der på denne seddel står et lige tal.

Det er fuldstændigt uoverskueligt at gennemgå alle mulige måder at trække sedlerne på, men da vi kun er interesserede i om tallene på sedlerne er lige eller ulige, er dette heller ikke nødvendigt. Vi kan i stedet nøjes med at se på antallet af sedler med ulige tal eller antallet af sedler med lige tal. Faktisk behøver vi ikke engang se på antallet, men blot på pariteten af antallet. Det viser sig at det er smartest at fokusere på sedler med ulige tal på.
Fra starten er der et lige antal sedler med ulige tal. Hvis man trækker to lige tal, er forskellen lige, hvis man trækker et lige og et ulige, er forskellen ulige, og hvis man trækker to ulige tal, er forskellen lige. Der bliver altså nul eller to færre sedler med ulige tal for hver gang vi trækker. Der vil derfor altid være et lige antal sedler med et ulige tal i hatten. Når der kun er en seddel tilbage, må der derfor stå et lige tal på den.

1.2 Opgave

Ved en fest går nogle af deltagerne rundt og hilser på hinanden ved at udveksle håndtryk. Vis at antallet af personer der udveksler håndtryk med et ulige antal personer, er et lige tal.

1.3 Opgave

En GEORG MOHR-terning er en terning på hvis seks sideflader der er trykt henholdsvis G, E, O, R, M og H.
Peter har 9 helt ens GEORG MOHR-terninger. Kan det lade sig gøre at stable dem oven på hinanden til et tårn, der på hver af de fire sider i en eller anden rækkefølge viser bogstaverne G E O R G M O H R ?

1.4 Opgave

På en ø er der 18 grønne, 17 røde og 13 blå kamæleoner. Hver gang to kamæleoner af forskellig farve møder hinanden, skifter de begge to farve til den tredje farve.
Kan det lade sig gøre at alle kamæleonerne på øen til sidst har samme farve?

1.5 Eksempel

I opgaverne ovenfor var det nok at se på om en bestemt størrelse var lige eller ulige dvs. om den havde rest 0 eller 1 ved division med 2. Nogle gange er det imidlertid nødvendigt at udvide dette til tre tilfælde efter om det man betragter har rest 0, 1 eller 2 ved division med 3, eller i n tilfælde afhængig af resten ved division med n.
I et spil ligger der 58 sten på et bord. To spillere skiftes til at tage enten en eller to sten. Spørgsmålet er nu om den spiller der starter, kan finde en spillestrategi så hun altid vinder? Første gang fjerner hun en sten så der er 57 sten tilbage. Da 57 er delelig med 3, vil der lige meget om modparten fjerner en eller to sten, ligge et antal sten tilbage som ikke har rest nul ved division med tre. Derfor kan den spiller der starter endnu engang trække en eller to sten således at det antal sten der bliver tilbage er deleligt med 3. Ved at følge denne strategi vil hun vinde, da der aldrig ligger en eller to sten tilbage når modparten skal trække.

1.6 Opgave

På en tavle står et kvadrattal. To spillere spiller et spil hvor man i hver tur dividerer tallet på tavlen med et produkt af forskellige primtal som går op i tallet, visker tallet ud og skriver resultatet på tavlen. Den spiller der skriver tallet 1 på tavlen, har vundet.
Findes der en strategi så den spiller der starter, kan vinde?

2 Skuffeprincippet

Skuffeprincippet benytter de fleste helt intuitivt, og det benyttes i mange forskellige opgavetyper. Skuffeprincippet går ud på at hvis man har $n+1$ bolde som man placerer i n skuffer, så findes der mindst en skuffe med mindst to bolde.

2.1 Eksempel

Hvis 1100 mennesker er forsamlet så vil mindst fire ifølge skuffeprincippet have fødselsdag samme dag da $3 \cdot 366 = 1098 < 1100$.

2.2 Eksempel

Man kan også bruge skuffeprincippet til at vise at visse følger er periodiske fra et vist trin: Betragt følgen $1, 3, 6, 0, 9, 5, 4, \ldots$ hvor det næste tal i følgen, fra og med det fjerde, er sidste ciffer i summen af de tre foregående. Den må være periodisk fra et vist trin ifølge skuffeprincippet da der kun er endeligt mange kombinationer af tre cifre.

2.3 Eksempel

I en vilkårlig delmængde af mængden $M = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ med 15 elementer findes to talpar med samme differens: I delmængden er der nemlig i alt $K_{15,2} = \frac{15\cdot 14}{1\cdot 2} = 105$ forskellige talpar hvis differens er et helt tal mellem 1 og 99.

Her er nogle eksempler på meget forskellige opgavetyper hvor man kan anvende skuffeprincippet.

2.4 Opgave

Halvtreds elever har fået karakterer i både mundtlig og skriftlig matematik efter den nye karakterskala. Vis at mindst to af eleverne har fået præcis de samme karkterer.

2.5 Opgave

Vis at hvis et 2×2 kvadrat indeholder 10 punkter, da vil der findes to punkter med afstand mindre end en.

2.6 Opgave

Under en matematikforelæsning sover fem matematikere præcis to gange hver. De var alle vågne da forelæsningen startede, og for hvert par af matematikere var der et tidspunkt hvor de begge sov.
Vis at der på et tidspunkt var mindst tre matematikere der sov samtidig.

2.7 Opgave

Vis at uanset hvordan 15 punkter afsættes inden for en cirkel med radius 2 (cirkelranden medregnet), vil der eksistere en cirkel med radius 1 (cirkelranden medregnet) som indeholder mindst 3 af de 15 punkter. (Georg Mohr 91)

2.8 Opgave

Ethvert punkt i planen er malet i en af n givne farver. Vis at der findes et rektangel hvis hjørner alle har samme farve. (Engel)

3 Løsningsskitser

Opgave 1.2
Summen af det antal håndtryk hver enkelt person til festen har givet, kaldes S. Hver gang der udveksles et håndtryk, vokser S med to dvs. at S er lige. Hvis vi ser på de personer der har udvekslet et lige antal håndtryk, må summen af deres håndtryk også være lige. Summen af det antal håndtryk alle dem som har udvekslet et ulige antal håndtryk, har givet, må derfor også være lige da S er lige. Men hvis summen af en række ulige tal er lige, da må antallet af tal være lige. Derfor er der et lige antal personer som har udvekslet et ulige antal håndtryk.

Opgave 1.3
Bogstaverne G, O og R skal optræde to gange på hver side, mens E, M og H derimod kun skal optræde en. Når de seks bogstaver placeres på en terning, kan man derfor ikke undgå at placere et bogstav der optræder to gange, og et der optræder en gang, modsat hinanden. Hvis et bogstav optræder to gange på den ene side af tårnet, vil bogstavet der er placeret modsat på terningen, optræde to gange på den anden side af tårnet. Derfor kan det ikke lade sig gøre at bygge et tårn hvor bogstaverne G E O R G M O H R på hver af de fire sider optræder i en eller anden rækkefølge.

Opgave 1.4
Bemærk først at hver gang to kamæleoner mødes bliver der en færre af to af farverne, og to mere af den tredje, dvs. forskellen i antallet af fx grønne og røde kamæleoner vil ændre sig med 0 eller 3 og altså være konstant modulo 3. Hvis alle kamæleoner på øen skal have samme farve, vil der ikke være nogen kamæleoner af to af farverne dvs. forskellen mellem antallet af kamæleoner af disse to farver er 0. Forskellen mellem antallet af en farve kamæleoner og en anden kan aldrig blive 0, da den fra starten ikke er 0 modulo 3, og den ikke ændres modulo 3. Dermed kan det ikke ende med at der kun er en farve kamæleoner tilbage

Opgave 1.6
Nej, den spiller der starter, kan ikke altid vinde, men det kan spiller nummer to derimod. Kvadrattallene er netop de tal hvor alle primfaktorerne i primfaktoropløsningen har lige potenser. Hvis spiller nummer 1 deler kvadrattallet med $m = p_1 \dots p_r$ hvor $p_1, p_1, \dots, p_r$ er r forskellige primtal, da kan spiller nummer to også dele med m, og resultatet bliver et nyt kvadrattal. Ved denne strategi er der altid et kvadrattal når spiller 1 skal trække, og spiller 1 kan derfor aldrig opnå tallet 1. Efter endeligt mange træk må spiller to derfor skrive tallet 1.

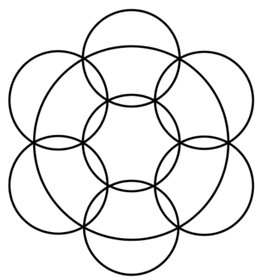
Opgave 2.4
Da der er syv karakterer, er der $7 \cdot 7 = 49$ ordnede par af karakterer. Derfor må der blandt 50 elever ifølge skuffeprincippet findes mindst to der har fået identiske karakterer.

Opgave 2.5
Kvadratet deles op i 9 kvadrater med sidelængde $\frac{2}{3}$ og diagonallængde $\frac{\sqrt{8}}{3} < 1$. Ifølge skuffeprincippet må der være to punkter som ligger i samme kvadrat, og afstanden mellem disse to punkter er mindre end en.

Opgave 2.6

Der er $K_{5,2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 10$ par af matematikere som har sovet samtidig, og disse par opstår netop når en matematiker falder i søvn. Dette sker 10 gange, men den første gang opstår der ingen par der har sovet samtidig. Derfor må der ifølge skuffeprincippet på mindst et af de ni tidspunkter hvor en matematiker faldt i søvn (fraregnet første gang) opstå mindst to nye par, dvs. på dette tidspunkt må mindst tre matematikere have sovet samtidig.

Opgave 2.7
Cirklen med radius 2 kan dækkes af 7 cirkler med radius 1 som vist på figur 1. (Overvej hvordan de skal konstrueres.) Ifølge skuffeprincippet findes derfor en cirkel med radius 1



Figur 1:

som indeholder mindst 3 punkter.

Opgave 2.8
Betragt alle gitterpunkterne (x, y) med $1 \leq x \leq n+1$ og $1 \leq y \leq n^{n+1}+1$. Hver række kan farves på n^{n+1} forskellige måder. Ifølge skuffeprincippet findes derfor mindst to rækker der er farvet på samme måde. Da der er n farver og $n+1$ punkter i hver række, findes igen ifølge skuffeprincippet mindst to punkter i samme række med samme farve. I de to rækker der er farvet identisk findes derfor to punkter af samme farve i den ene række, og sammen med de to tilsvarende punkter i den anden række udgør de hjørnerne i et rektangel.