

GEORG MOHR-KONKURRENCENS VINDERSEMINAR 2007

OPGAVESÆT I ALGEBRA

Opgave 1 Løs ligningen

$$\sqrt{3 - \sqrt{x+3}} = x .$$

Opgave 2 Om de reelle tal a, b, c og d gælder

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da .$$

Vis at

$$a = b = c = d .$$

Opgave 3 Løs ligningen

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0 .$$

Opgave 4 Løs med hensyn til x og y ligningen

$$(x + y)^2 + (x + 3y)^2 - 4(x + y) - 10(x + 3y) + 29 = 0 .$$

Opgave 5 Om de reelle tal a, b og c gælder

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 .$$

Vis at

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 3 .$$

Opgave 6 Lad $x_1, x_2, \dots, x_{2007}$ være positive reelle tal med produkt 1.

Vis at

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_{2007}) \geq 2^{2007} .$$

Opgave 7 Bestem alle reelle funktioner f så der for alle reelle tal x, y gælder

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y .$$

Opgave 8 Hvilket af tallene

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

er det største?

Opgave 9 Vis at der ikke findes nogen reel funktion f så der for alle reelle tal x, y gælder

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x - y| .$$