

GEORG MOHR-KONKURRENCENS VINDERSEMINAR 2007

Løsningsforslag til opgavesæt i algebra

Opgave 1 Venstresiden er aftagende, højresiden er voksende på $[-3; 6]$; $x = 1$ er øjensynligt løsning, og dermed den eneste.

Opgave 2 Gang ligningen igennem med 2, og gruppér:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + d^2 - 2cd) + (d^2 + a^2 - 2da) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a = b = c = d &. \end{aligned}$$

Opgave 3 Benyttes at $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$, kan ligningen omskrives til

$$\begin{aligned} 8(2^x + 2^{-x})^2 - 54(2^x + 2^{-x}) + 85 &= 0, \quad d = 196, \\ 2^x + 2^{-x} = \frac{54 + 14}{16} = \frac{17}{4}, \quad \text{gi'r } (2^x)^2 - \frac{17}{4} \cdot 2^x + 1 &= 0, \quad \text{så } 2^x = 4 \vee 2^x = \frac{1}{4}, \\ 2^x + 2^{-x} = \frac{54 - 14}{16} = \frac{5}{2}, \quad \text{gi'r } (2^x)^2 - \frac{5}{2} \cdot 2^x + 1 &= 0, \quad \text{så } 2^x = 2 \vee 2^x = \frac{1}{2}, \\ \text{dvs. } x = \pm 2, \pm 1. \end{aligned}$$

Opgave 4 Kopierer cirkelligningsomskrivning:

$$\begin{aligned} ((x + y)^2 - 4(x + y)) + ((x + 3y)^2 - 10(x + 3y)) &= -29 \\ \Leftrightarrow (x + y - 2)^2 + (x + 3y - 5)^2 &= -29 + 4 + 25 = 0 \\ \Leftrightarrow x + y = 2 \wedge x + 3y &= 5 \\ \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) &. \end{aligned}$$

Opgave 5

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \\ = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \\ = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \\ = 3 - (a + b + c)^3 \leq 3. \end{aligned}$$

Opgave 6 Benytter $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ (AG-ulighed, eller $1 + x - 2\sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2 \geq 0$), så

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_{2007}) &\geq 2\sqrt{x_1} \cdot 2\sqrt{x_2} \cdot \dots \cdot 2\sqrt{x_{2007}} \\ &= 2\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = 2^{2007} \end{aligned}$$

da tallenes produkt er 1.

Opgave 7

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y \quad .$$

$x = y = 0$: $f(0)^2 - f(0) = 0$, dvs. $f(0) = 0$ eller $f(0) = 1$,

$x = 0, y = 1$: $f(0)f(1) - f(0) = 1$, dvs. $f(0) = 1$,

$x \in \mathbb{R}, y = 0$: $f(x)f(0) - f(0) = x$, dvs. $f(x) = x + 1$.

Husker at gøre prøve: $f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = x+y$, ok.

Opgave 8 1. metode (Løsning vha. binomialkoefficienter.)

$1 < \sqrt{2}$, og $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ da $\sqrt{2}^6 = 8$ og $\sqrt[3]{3}^6 = 9$. Viser nu at for $n \geq 3$ er $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \Leftrightarrow n \cdot n^{\frac{1}{n}} > n+1 \Leftrightarrow (1 + \frac{1}{n})^n < n$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \\ &< \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \quad . \end{aligned}$$

2. metode (Løsning vha. differentialregning.)

Vi skal sammenligne værdier af tallene $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$. Monotoniforhold for funktionen $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ undersøges: $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = \exp(\ln x^{\frac{1}{x}}) = \exp(\frac{1}{x} \cdot \ln x)$, så $f'(x) = \exp(\frac{1}{x} \cdot \ln x) \cdot ((-\frac{1}{x^2}) \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}) = \exp(\frac{1}{x} \cdot \ln x) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$, hvoraf f voksende i $]0; e]$ og aftagende i $[e; \infty[$. Dermed $1 < \sqrt{2}$ og $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \dots > \sqrt[n]{n} > \dots$. Da $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ (fordi $(\sqrt[3]{3})^6 = 9 > 8 = 2^3 = (\sqrt{2})^6$), er $\sqrt[3]{3}$ det største af alle tallene.

Opgave 9 Del akserne ind i intervaller af længde $\frac{1}{n}$:

$$0 \leq \dots < \frac{i}{n} < \frac{i+1}{n} < \frac{i+2}{n} < \dots < 1 \leq \dots < \frac{n+i}{n} < \frac{n+i+1}{n} < \dots < 2 \quad .$$

Benyt uligheden med $x = \frac{i+2}{n}$ og $y = \frac{i}{n}$:

$$\frac{f(\frac{i+2}{n}) + f(\frac{i}{n})}{2} \geq f(\frac{i+1}{n}) + f(\frac{2}{n}) \Leftrightarrow f(\frac{i+2}{n}) - f(\frac{i+1}{n}) \geq f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n}) + \frac{4}{n} \quad ,$$

dvs. tilvæksten for f vokser med mindst $\frac{4}{n}$ hver gang vi går et interval til højre, og dermed med mindst 4 hver gang vi går n intervaller til højre.

Heraf fås:

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{n+i+1}{n}) - f(\frac{n+i}{n}) \quad (\text{teleskopisk sum}) \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n}) + 4 = f(1) - f(0) + 4n \quad , \end{aligned}$$

oplagt modstrid.