

## „Gamle“ uligheder (af Søren Galatius med flere...)

Omskrivninger til  $a^{\text{lige}}$ .

1. Vis, at for vilkårlige reelle tal er

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

2. Vis, at for alle  $a, b \geq 0$  er

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

3. Vis, at for alle  $a, b, c > 0$  er

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

### Anvendelse af kendte uligheder

4. Lad  $A, B, C$  og  $D$  være vinklerne i en firkant i planen. Vis, at

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) + \sin\left(\frac{B}{2}\right) + \sin\left(\frac{C}{2}\right) + \sin\left(\frac{D}{2}\right) \leq 2\sqrt{2}$$

og

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right) \sin\left(\frac{D}{2}\right) \leq \frac{1}{4}$$

5. Vis, at for alle  $a, b, c > 0$  er

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

6. Vis, at for alle reelle tal  $a_1, a_2, \dots, a_n$  er

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

### Anvendelse af substitution

7. Vis at for alle  $a, b, c > 0$  er

$$2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+a} < 2^{a+b+c+1} + 1$$

8. Vis, at

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

for alle reelle tal  $a, b, c$ , for hvilke kvadratrødderne er definerede.

9. Vis, at for alle  $x, y, z > 0$  er

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$