Opgaver om uligheder

Georg Mohr vinderseminar ~~2001~~ 2006

Opgave 1 Vis, at for positive reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ gælder

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Bemærkning: Udtrykket på venstre side af ulighedstegnet kaldes det *harmoniske gennemsnit* af $x_1, x_2, \dots, x_n$. Denne opgave viser altså, at det harmoniske gennemsnit altid er mindre end eller lig med det *geometriske gennemsnit*.

Opgave 2 Lad A, B, C, D være vinklerne i en firkant i planen. Vis, at

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) + \sin\left(\frac{B}{2}\right) + \sin\left(\frac{C}{2}\right) + \sin\left(\frac{D}{2}\right) \leq 2\sqrt{2}$$

Opgave 3 Lad $a, b, c > 0$ være reelle tal. Vis

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Opgave 4 Lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ og $y_1, y_2, \dots, y_n$ være positive reelle tal. Vis, at

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geq \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2}$$

Opgave 5 Vis, at

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

for alle a, b, c så kvadratrødderne er definerede.

Opgave 6 (NMC 1990) Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Vis, at

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Opgave 7 Lad $M = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ være en mængde af k forskellige naturlige tal så det for hvert $n \in M$ gælder at $\frac{1}{n}$ kan skrives som *endelig* decimalbrøk. Vis, at

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} < \frac{5}{2}$$