Georg Mohr Vinderseminar 2006

Vinderterminsprøve

Opgave 1. En person har 4 brikker, alle af form som et ligebenet trapez. De parallelle sider har heltallige længder x og y med $y > x$. De ikke parallelle sider danner en vinkel på $45°$ med siden, som har længden y. Skønt både x og y er forskellige fra brik til brik, er arealet af hver brik det samme hele positive tal, der er mindre end 30.
Bestem for hver af de 4 brikker sidelængderne x og y.

Opgave 2. Givet en cirkel med AB som diameter. Punktet X, der er forskellig fra punkterne A og B, ligger på cirklen, og tangenten t_X til cirklen i punktet X er ikke parallel med AB.
Tangenten til cirklen i A begenes t_A, og tangenten til cirklen i punktet B betegnes med t_B.
Linjen gennem B og X skærer t_A i punktet Y, og linjen gennem A og X skærer t_B i Z.
Bevis, at tangenten t_X skærer tangenten t_A i AY's midtpunkt.
Bevis, at linjerne t_X, YZ og AB går gennem samme punkt.

Opgave 3. Lad a være et positivt reelt tal. Funktionen f er bestemt ved, at

$$f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Bestem tallet $f(\frac{1}{2007}) + f(\frac{2}{2007}) + \cdots + f(\frac{2005}{2007}) + f(\frac{2006}{2007})$.

Opgave 4. Lad a og b være indbyrdes primiske positive hele tal. Endvidere er der givet et positivt helt tal c.
Findes der i talfølgen

$$a, a+b, a+4b, a+9b, \ldots, a+n^2b, \ldots$$

et tal, der er indbyrdes primisk med c?