Talteoriopgaver

Georg Mohr-Vinderseminar 2006

27. februar 2006

1. Øvelserne 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.2, 2.3 samt 2.4.
2. Lad n være et naturligt tal.
   (a) Vis at 3 går op i n hvis og kun hvis 3 går op i tværsummen af n.
   (b) Vis at 9 går op i n hvis og kun hvis 9 går op i tværsummen af n.
   (c) Vis at 7 går op i n hvis og kun hvis 7 går op i antallet af 10'ere minus det dobbelte af antallet af 1'ere i n. (Her skal antallet af 10'ere forstås som det tal x, så $n = 10x + y$ hvor x og y er hele tal med $0 \leq y \leq 9$.)
   (d) Vis at 11 går op i n hvis og kun hvis 11 går op i den alternerende tværsum af n (den alternerende tværsum fås som den almindelige tværsum, hvor man blot trækker hvert andet ciffer fra i stedet for at lægge det til. Fx for $n = 2574$ fås $2 - 5 + 7 - 4 = 0$, og 11 går op i 0).
   (e) Vis at 13 går op i n hvis og kun hvis 13 går op i antallet af 10'ere plus 4 gange antallet af 1'ere i n.
3. Vis, at der for alle naturlige tal n gælder at $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
4. Antag m ikke er delelig med 2 eller 5. Vis at der findes et tal på formen $111\ldots1$ (lutter 1-taller) som m går op i.
5. For hvilke ikke-negative hele tal n går 1599 op i $46^n + 34^n - 7^n - 5^n$ (Vink: $1599 = 39 \cdot 41$).
6. Antag $p + q$ er divisibel med 9. Vis at $p^9 + q^9$ er divisibel med 81.
7. Antag $n \geq 3$ er ulige. Vis at $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n$ er divisibel med n^2.

8. Lad $a > 1$ være et heltal. Vis at tallet $a^4 + a^2 + 1$ er et sammensat tal.

9. Lad m og n være to hele tal, som kan skrives som sum af to kvadrattal. Vis at produktet mn kan skrives som sum af to kvadrattal.

10. Du har en uudtømmelig beholdning af p- og q-øresfrimærker, hvor p og q er indbyrdes primiske. Hvilket portobeløb er det største som ikke kan dannes med disse frimærker?

11. Find samtlige løsninger $a, b, c \in \mathbb{N}$ til ligningen

$$(1 + \tfrac{1}{a})(1 + \tfrac{1}{b})(1 + \tfrac{1}{c}) = 2.$$

12. For hvilke hele tal $n \geq 2$ er der nøjagtig tre primfaktorer i tallet $n(n+1)(n+2)(n+3)$?

13. For hvilke hele tal n er $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ et tal med nøjagtig tre ens cifre?

14. Lad $f(n)$ betegne tværsummen af tallet n. Vis at $f(n) \equiv n \pmod 9$.

15. Beregn tallet $f(f(f(2005^{2005})))$.