
Opgaver i funktionalligninger vinderseminar 2006

1. Vis at en funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der opfylder:

$$f(f(n) + f(m)) = n + m$$

er injektiv.

2. Vis at en funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ der opfylder:

$$f(f(n+2)+2) = n$$

er bijektiv.

3. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder:

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x+y)$$

4. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder:

   a) $f(x + f(y)) = x + f(f(y))$.
   b) $f(2005) = 2006$.

5. Find alle funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der opfylder

$$f(f(n) + f(m)) = n + m$$

(som i opgave 1).

6. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder:

   a) $f(1) > 0$.
   b) $f(x) < 2006$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
   c) $f(x+1)^2 \geq f(x)^2 + 2f(xy) + f(y)^2$.

7. Find alle funktioner $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ der opfylder:

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x+y)f(f(x)y)$$