Løsninger til opgaver i funktionalligninger vinderseminar 2006

1. Antag at $f(n) = f(m)$. Da gælder at $n + n = f(f(n) + f(n)) = f(f(n) + f(m)) = n + m$, hvoraf det følger at $n = m$.

2. Da der står f af noget på venstresiden og n på højresiden ser vi at f er surjektiv. Antag nu at $f(n) = f(m)$. Da ses at

$$\begin{aligned} n - 2 = f(f((n-2)+2)+2) = f(f(n)+2) = \\ = f(f(m)+2) = f(f((m-2)+2)+2) = m - 2. \end{aligned}$$

3. Sættes $y = 0$ giver ligningen at $xf(0) = xf(x)$, som igen giver at $f(x) = f(0)$ for alle x. Det ses ved indsættelse at alle konstante funktioner er løsninger.

4. Med $y = 0$ i a) ses at f har en ret linje med hældning 1 som graf. Det vil sige $f(x) = x + b$, og ved hjælp af b) udregnes $b = 1$. Det kontrolleres at $f(x) = x + 1$ er en løsning.

5. Det ses at f rammer alle tal ≥ 2. Antag nu at der er et k hvor $f(k) > k$. Da f injektiv er $f(n) + f(n-k) = f^{-1}(k) < k$. Det giver for mange måder hvorpå $f^{-1}(k)$ kan skrives som en sum af to tal (husk igen at f er injektiv). Nu er $f(n) \leq n$ og injektiv så må $f(n) = n$.

6. Der findes ingen funktioner der opfylder kravene. Vi laver et modstridsbevis. Antag at f er en funktion der opfylder kravene. Vi vil gerne bevise $P(n) : f(n) \geq nf(1)$. $P(1)$ er trivielt sand. Antag nu $P(n)$ og brug c) til at få $f(n+1) \geq \sqrt{(f(n)^2 + 2f(n) + f(1)^2} = \sqrt{(f(n) + f(1))^2} = f(n) + f(1) \geq nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$. Da $f(1) > 0$ findes n så $f(n) \geq nf(1) > 2006$. Vi har nu vores modstrid.