

Georg Mohr Vinderseminar 2006

Hjemmeopgavesæt

Opgave 1. Hvad er matematisk induktion for noget? Hvis du ikke kender svaret, så find selv ud af det.

Vis ved induktion, at $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Opgave 2. Gør rede for, at hvis et ulige tal n kan skrives som en sum af to kvadrattal, da er $n \equiv 1 \pmod{4}$.

(Definition: Lad k være et helt tal. To hele tal n og m siges at være kongruente modulo k , hvis k går op i $n - m$. Dette skrives: $n \equiv m \pmod{k}$)

Opgave 3. Om en funktion f gælder, at $f(x) + xf(1-x) = x$ for alle reelle tal x .

Bestem tallet $f(2)$.

Find en forskrift for f .

Opgave 4. Vis, at der blandt 5 punkter i et kvadrat med sidelængde 2 må være to punkter, hvis afstand højst er $\sqrt{2}$.

Opgave 5. Vis, at hvis x ikke er kongruent med 0 modulo 3, så er $x^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$.

Opgave 6. Vis, at $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ for alle naturlige tal n .
(ide: integralregning eller induktion)

Opgave 7. Ni personer kan hver højst tre sprog. Hver gang man udtager tre af de ni, har mindst to af dem et sprog til fælles.

Gør rede for, at mindst tre personer taler samme sprog.

Hvad hvis der kun er 8 personer, gælder så det samme?

Opgave 8. Vis, at der i en ikke-stumpvinklet trekant ABC gælder, at $\sin A + \sin B + \sin C > 2$.

Opgave 9. Gør rede for, at der findes et naturligt tal med lutter 1-taller $n = 111\dots 1$, hvori 7 går op. Gælder det også for ethvert primtal $p \neq 2, 5$?

Opgave 10. Firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med radius r . Skæringspunktet mellem diagonalerne AC og BD kaldes E .

Vis, at $AC \perp BD \Rightarrow EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4r^2$.

Gælder pilen den anden vej \Leftarrow ?

Opgave 11. Vis, at for alle positive tal a , b og c gælder

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} &\geq 1 \\ \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} &\leq 1 \end{aligned}$$

(Ide: Vis og benyt $2bc \leq b^2 + c^2$, $2ca \leq c^2 + a^2$ og $2ab \leq a^2 + b^2$)