Georg Mohr-vinderseminar 2004

NMC-“terminsprøve”

Onsdag den 25. marts 2004 kl. 9-13.
Hver opgave giver 5 point.
Skrive- og tegneredskaber er eneste tilladte hjælpemidler.

1. Bestem samtlige par af positive hele tal x og y som opfylder

$$x^2 + 615 = 2^y .$$

2. En trekant ABC er indskrevet i en cirkel med centrum O. Vinkelhalveringslinjen fra A skærer BC i punktet D. Linjen gennem D vinkelret på AO skærer siden AC eller dens forlængelse i punktet P. Vis at $AB = AP$.

3. To følger af positive reelle tal $a_1, a_2, a_3, \ldots$ og $b_1, b_2, b_3, \ldots$ opfylder

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}\,, \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Vis at

$$a_{25} + b_{25} > 10\sqrt{2}\,.$$

4. Et matematikhold på 20 elever har været til eksamen, og hver elev har fået en skriftlig og en mundtlig karakter efter 13-skalaen. Der er på holdet ikke to elever som har fået nøjagtig de samme to karakter. Vi kalder elev A ‘bedre’ end elev B hvis ingen af A’s to karakterer er lavere end B’s tilsvarende. Vis at der på holdet findes tre elever A, B og C så A er bedre end B, og B er bedre end C.

Gælder det samme hvis antallet af elever er 19?