

Georg Mohr-vinderseminar 2004

NMC- “terminsprøve”

Onsdag den 25. marts 2004 kl. 9-13.

Hver opgave giver 5 point.

Skrive- og tegneredskaber er eneste tilladte hjælpemidler.

1. Bestem samtlige par af positive hele tal x og y som opfylder

$$x^2 + 615 = 2^y.$$

2. En trekant ABC er indskrevet i en cirkel med centrum O . Vinkelhalveringslinjen fra A skærer BC i punktet D . Linjen gennem D vinkelret på AO skærer siden AC eller dens forlængelse i punktet P . Vis at $AB = AP$.
3. To følger af positive reelle tal a_1, a_2, a_3, \dots og b_1, b_2, b_3, \dots opfylder

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}, \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vis at

$$a_{25} + b_{25} > 10\sqrt{2}.$$

4. Et matematikhold på 20 elever har været til eksamen, og hver elev har fået en skriftlig og en mundtlig karakter efter 13-skalaen. Der er på holdet ikke to elever som har fået nøjagtig de samme to karakter. Vi kalder elev A ‘bedre’ end elev B hvis ingen af A 's to karakterer er lavere end B 's tilsvarende. Vis at der på holdet findes tre elever A , B og C så A er bedre end B , og B er bedre end C .

Gælder det samme hvis antallet af elever er 19?

Løsninger til NMC- "terminsprøve"

1. Modulo 3 er x^2 kongruent med 0 eller 1, og der gælder $615 \equiv 0$ og $2^y \equiv (-1)^y$. Heraf ses at y må være lige. Den givne ligning kan så skrives om til

$$(2^{\frac{y}{2}} + x)(2^{\frac{y}{2}} - x) = 615.$$

Faktoriseringerne af 615 er $1 \cdot 615$, $3 \cdot 205$, $5 \cdot 123$ og $15 \cdot 41$, og det eneste af disse par af faktorer hvis sum er en potens af 2, er $(5, 123)$. Dermed har ligningen netop én løsning givet ved $2 \cdot 2^{\frac{y}{2}} = 123 + 5$ og $2x = 123 - 5$, altså $x = 59$ og $y = 12$.

2. Lad E og Q betegne de to punkter hvor forlængelserne af henholdsvis AD og AO skærer cirklen. Når vinkler og buer regnes med fortegn med positiv retning ACB , har vi så $\angle ADP = 90^\circ + \angle EAQ = \frac{1}{2}(180^\circ + \widehat{EQ}) = \frac{1}{2}(\widehat{QA} + \widehat{EQ}) = \frac{1}{2} \widehat{EA} = \frac{1}{2}(\widehat{EB} + \widehat{BA}) = \frac{1}{2}(\widehat{CE} + \widehat{BA}) = \angle BDA$. Dermed er trekantene ADB og ADP kongruente og $AB = AP$.
3. Af iterationsligningerne følger

$$a_{n+1}b_{n+1} = (a_n + \frac{1}{b_n})(b_n + \frac{1}{a_n}) = a_nb_n + \frac{1}{a_nb_n} + 2 > a_nb_n + 2.$$

Heraf fås $a_2b_2 \geq 4$ og $a_nb_n > 2n$ for $n \geq 3$. Specielt gælder da $a_{25}b_{25} > 50$ og $a_{25} + b_{25} \geq 2\sqrt{a_{25}b_{25}} > 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}$.

4. En elev A 's skriftlige karakter betegner vi med $s(A)$ og den mundtlige med $m(A)$. Hvis der om tre forskellige elever A , B og C gælder at A er bedre end B , og B er bedre end C , vil vi sige at de danner en 'trekæde'. Påstanden er at der findes mindst én trekæde.

Antag at dette ikke er tilfældet. Da 3 elever som alle har samme skriftlige karakter, ville danne en trekæde, har så højst 2 elever en given skriftlig karakter. Men så har nøjagtig 2 elever hver af de 10 mulige skriftlige karakterer. Tilsvarende for de mundtlige karakterer. Lad A_1 og A_2 betegne to elever med samme skriftlige karakter, og lad $m(A_1) > m(A_2)$. Den elev A_3 som har samme mundtlige karakter som A_2 , opfylder så $s(A_2) < s(A_3)$, for ellers ville A_1 , A_2 og A_3 danne en trekæde. Tilsvarende opfylder den elev A_4 som har samme skriftlige karakter som A_3 , at $m(A_3) > m(A_4)$. Vi kan fortsætte sådan indtil alle 20 elever er stillet op i en rækkefølge hvor der gælder $m(A_1) > m(A_2) = m(A_3) > m(A_4) = m(A_5) > m(A_6) = \dots = m(A_{19}) > m(A_{20})$. Men her optræder ">" 10 gange, hvilket er umuligt.

19 elever kan få følgende sæt af karakterer:

$$(0, 13), (0, 11), (3, 11), (3, 10), \dots, (13, 3), (13, 0).$$

Her er ingen trekæde, så påstanden er ikke sand for 19 elever.