Georg Mohr-vinderseminar 2004

Flere opgaver, talteori

1. Hvilket er det største tal der går op i alle de tal der indeholder hver af cifrene fra 1 til 9 netop én gang?
2. Vis at ligningen $x^2 + y^2 - 15z^2 = 7$ ikke har heltallige løsninger.
3. Vis at hvis m og n er hele tal, så er mindst ét af tallene $2mn$, $m^2 - n^2$ og $m^2 + n^2$ deleligt med 5.
4. Hvilket er det største syvcifrede tal med lutter forskellige cifre som er deleligt med 72?
5. For hvilke positive hele tal n er $1 + 2 + ... + n$ et tal med nøjagtig tre ens cifre?
6. Vis at der for ethvert helt tal n gælder $n^{13} = n \pmod{2730}$.
7. For hvilke hele tal $n \geq 2$ går nøjagtig tre primtal op i tallet $n(n+1)(n+2)(n+3)$?
8. Vis at tallet $1^n + 2^n + \cdots + n^n$ er deleligt ned n^2 hvis $n \geq 3$ er ulige.

Georg Mohr-vinderseminar 2004

Løsningsskitser til flere opgaver, talteori

1. To af disse tal med de samme syv indledende cifre og slutcifrene henholdsvis 98 og 89 har differensen 9. Intet tal større end 9 kan så gå op i dem begge. 9 går op i alle tallene fordi tværsummmen 45 er delelig med 9.

2. Hvis ligningen er opfyldt, har vi $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ modulo 4 og 8. Da $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ når x er lige, og $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ når x er ulige, må x, y og z alle være ulige for at opfylde kongruensen modulo 4. Men da $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ når x er ulige, er kongruensen modulo 8 så ikke opfyldt.

3. Hvis ikke $2mn$ er delelig med 5, er hverken m eller n delelig med 5, og så gælder $m^4 \equiv n^4 \equiv 1 \pmod 5$ og dermed $5 \mid m^4 - n^4 = (m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$. Men så går 5 op i mindst én af disse faktorer.

4. Det største syvcifrede tal med lutter forskellige cifre er 9876543, som er kongruent med 15 modulo 72. Subtraktion af 15 for at få et tal der er deleligt med 72, giver 9876528, som har to ens cifre. Fortsat subtraktion af 72 giver i rækkefølge 9876456, 9876384 og 9876312, hvor det sidste har lutter forskellige cifre. Det er så det søgte tal.

5. Hvis $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ er trecifret, er $n^2 < n(n+1) < 2000$, og dermed $n < 45$. Hvis alle cifre er ens, har vi $n(n+1) = 2 \cdot 111x = 2 \cdot 3 \cdot 37x$ med $1 \leq x \leq 9$. Enten n eller $n+1$ er så delelig med 37, og n eller $n+1$ er lig med 37. Da $36 \cdot 37/2 = 666$ og $37 \cdot 38/2 = 703$, er $n = 36$ dermed eneste løsning.

6. $2730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. For hver af disse primfaktorer p findes der et helt tal s så $(p-1)s = 12$. Vi har så $n^{13} \equiv n(n^{p-1})^s \equiv n1^s \equiv n \pmod p$. Da dette er opfyldt for alle de fem primfaktorer, følger $n^{13} \equiv n \pmod{2730}$.

7. Da to af faktorerne er lige, indgår 2 som primfaktor, og da intet ulige primtal kan gå op i begge de øvrige faktorer, er de så positive potenser af hver sit ulige primtal. Hvis intet af disse går op i nogen anden faktor, er de lige faktorer potenser af 2, og da de danner differensen 2, er de 2 og 4. Vi har så $n = 2$. Hvis et af de to ulige primtal går op i en anden faktor, danner de to faktorer mindst differensen p, hvor p er det pågældende primtal. Så er p lig med 3, de to faktorer er n og $n+3$, og den af dem som ikke er en potens af 3, er lige. Da intet ulige primtal går op i den anden lige faktor, er den en potens af 2. Den lige faktor som 3 går op i, danner så differensen 2 med en potens af 2 og differensen 3 med en potens af 3 og indeholder dermed hver af primfaktorerne 2 og 3 nøjagtig en gang. Da det tredje primtal ikke kan gå op i denne faktor, er den så lig med 6. Da denne faktor var enten n eller $n+3$, er n så 3 eller 6. Alt i alt har vi nu fundet at de mulige værdier af n er 2, 3 og 6. Disse er alle

realiseret idet hvert af tallene $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ og $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ har netop tre primfaktorer.

8. Da n^2 går op i n^n, er det tilstrækkeligt at betragte summen $1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$. Her danner leddene par $p^n + q^n$ med $p + q = n$. Vi har $p^n + q^n = (p+q)(p^{n-1} - p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 - \cdots + q^{n-1}) = n(p^{n-1} - p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 - \cdots + q^{n-1})$. Af $q = n - p \equiv -p \pmod{n}$ får vi $p^{n-1} - p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 - \cdots + q^{n-1} \equiv np^{n-1} \equiv 0 \pmod{n}$. Dermed går n op i den sidste faktor i $p^n + q^n$, og n^2 går op i hele udtrykket.