

Opgaver, talteori

1. I B. Østergaard Pedersen: *Matematik leksikon - Håndbog i matematik og regning for skole og hjem* kan man læse regler for hvornår et helt tal går op i et andet. Der er regler for alle divisorer fra 2 til 20. Nedenfor er angivet nogle få af dem. Bevis dem.
 - (a) 3 går op i et tal hvis og kun hvis det går op i tallets tværsom.
 - (b) 7 går op i et tal hvis og kun hvis antallet af tiere minus det dobbelte af enerne er deleligt med 7. [Eksempel: 7 går op i 3486 fordi $386 - 2 \cdot 6 = 336$, $33 - 2 \cdot 6 = 21$, og 7 går op i 21.]
 - (c) 11 går op i et tal hvis og kun hvis summen af hverandet af tallets cifre minus summen af de øvrige er deleligt med 11.
 - (d) 13 går op i et tal hvis og kun hvis antallet af tallets tiere plus 4 gange sidste ciffer er deleligt med 13.
2.
 - (a) Bestem det mindste tal med tværsom 2004.
 - (b) Kan 2004 være tværsummen af et kvadrattal?
3. Vis at ethvert tal som hverken er deleligt med 2 eller 5, går op i et tal hvis cifre alle er 1.
4. For hvilke ikke-negative hele tal n går 899 op i $36^n + 24^n - 7^n - 5^n$?
[Hjælp: $899 = 29 \cdot 31$.]
5. Vis at hvis summen $m + n$ af to hele tal m og n er delelig med 7, så er $m^7 + n^7$ deleligt med 49.
6. Vis at $-\frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{3}n$ er et helt tal for alle hele tal n .
7. Du har en udtømmelig beholdning af p - og q -øresfrimærker, hvor p og q er indbyrdes primiske. Hvilket portobeløb er det største som ikke kan dannes med disse frimærker?
8. Vis at der er uendelig mange primtal som ikke kan skrives på formen $4n + 3$, hvor n er et helt tal.
[Hjælp: Vis at ethvert tal af formen $4n + 3$ har en primfaktor af samme form.]