Georg Mohr-vinderseminar 2004

Opgaver, talteori

1. I B. Østergaard Pedersen: *Matematik leksikon - Håndbog i matematik og regning for skole og hjem* kan man læse regler for hvornår et helt tal går op i et andet. Der er regler for alle divisorer fra 2 til 20. Nedenfor er angivet nogle få af dem. Bevis dem.
   (a) 3 går op i et tal hvis og kun hvis det går op i tallets tværsum.
   (b) 7 går op i et tal hvis og kun hvis antallet af tiere minus det dobbelte af enerne er deleligt med 7. [Eksempel: 7 går op i 3486 fordi $386-2\cdot 6 = 336$, $33 - 2 \cdot 6 = 21$, og 7 går op i 21.]
   (c) 11 går op i et tal hvis og kun hvis summen af hverandet af tallets cifre minus summen af de øvrige er deleligt med 11.
   (d) 13 går op i et tal hvis og kun hvis antallet af tallets tiere plus 4 gange sidste ciffer er deleligt med 13.
2. (a) Bestem det mindste tal med tværsum 2004.
   (b) Kan 2004 være tværsummen af et kvadrattal?
3. Vis at ethvert tal som hverken er deleligt med 2 eller 5, går op i et tal hvis cifre alle er 1.
4. For hvilke ikke-negative hele tal n går 899 op i $36^n + 24^n - 7^n - 5^n$?

   [Hjælp: $899 = 29 \cdot 31$.]
5. Vis at hvis summen $m + n$ af to hele tal m og n er delelig med 7, så er $m^7 + n^7$ deleligt med 49.
6. Vis at $-\frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{3}n$ er et helt tal for alle hele tal n.
7. Du har en uudtømmelig beholdning af p- og q-øresfrimærker, hvor p og q er indbyrdes primiske. Hvilket portobeløb er det største som ikke kan dannes med disse frimærker?
8. Vis at der er uendelig mange primtal som ikke kan skrives på formen $4n + 3$, hvor n er et helt tal.

   [Hjælp: Vis at ethvert tal af formen $4n + 3$ har en primfaktor af samme form.]

Georg Mohr-vinderseminar 2004

Løsningsskitser til øvelser og opgaver, talteori

Svar på øvelser

A: $x = 3 - 12t$, $y = -1 + 7t$. B: $x \equiv 97 \pmod{331}$. C: $x \equiv -3 \pmod{210}$. D: $(-4)_{21}$.

Løsningsskitser til opgaver

1. (a) $a + 10b + 100c + \cdots \equiv a + b + c + \cdots \pmod 3$.
   (b) $a + 10b \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow -2a - 20b \equiv -2a + b \equiv 0 \pmod 7$.
   (c) og (d) tilsvarende.

2. (a) Da $2004 = 222 \cdot 9 + 6$, er svaret $699\ldots 99$ med 222 cifre 9. (b) Nej, for tværsummen og dermed tallet selv er deleligt med 3. Hvis det var et kvadrattal, var det så også deleligt med 9. Men så skulle 9 gå op i tværsummen 2004, og det er ikke tilfældet.

3. Kald tallet n og betragt restklasserne modulo n. Da deres antal er endeligt, findes der to tal med lutter cifre 1 som tilhører samme restklasse. n går op i disse to tals differens, som er et antal cifre 1 efterfulgt af cifre 0. Da hverken 2 eller 5 går op i n, går n op i det tal som dannes af de indledende cifre 1.

4. 899 går op hvis og kun hvis både 29 og 31 går op. Betingelsen for at 29 går op, er $36^n + 24^n - 7^n - 5^n \equiv 7^n + (-5)^n - 7^n - 5^n \equiv (-5)^n - 5^n \equiv 0 \Leftrightarrow (-5)^n \equiv (-1)^n 5^n \equiv 5^n \Leftrightarrow (-1)^n \equiv 1 \pmod{29}$; altså n lige. Kravet om at 31 går op giver ved helt tilsvarende regning den samme betingelse.

5. Vi har $m^7 + n^7 = (m+n)(m^6 - m^5 n + m^4 n^2 - \cdots + n^6)$. Hvis $m + n \equiv 0 \pmod 7$, og dermed $n \equiv -m \pmod 7$, har vi $m^6 - m^5 n + m^4 n^2 - \cdots + n^6 \equiv 7m^7 \equiv 0 \pmod 7$. Så går 7 op i begge faktorer, og $7 \cdot 7 = 49$ i hele udtrykket.

6. Tallet er helt hvis og kun hvis $-n^3 + 9n^2 - 14n$ er deleligt med 6. Da enten n eller $n-5$ er lige, er differensen $(-(n+1)^3 + 9(n+1)^2 - 14(n+1) - (-n^3 + 9n^2 - 14n) = -3n(n-5) - 6$ delelig med 6 for alle hele n. Men så er $-n^3 + 9n^2 - 14n$ deleligt med 6 for alle n hvis og kun hvis det er opfyldt for ét n, og det er opfyldt for $n = 0$.

7. Ligningen $xp + yq = pq - p - q$ har ingen løsninger med ikke-negative hele tal x og y. Løsningerne opfylder nemlig $xp \equiv -p \pmod q$, hvoraf følger $x \equiv -1 \pmod q$. Hvis $x \geq 0$, har vi så $x \geq q - 1$. Tilsvarende fås $y \geq p - 1$ hvis $x \geq 0$, Hvis $x, y \geq 0$, har vi så $xp + yq \geq (q-1)p + (p-1)q > pq - p - q$.

For $z > pq - p - q$ har $xp + yq = z$ løsninger med ikke-negative hele tal x og y. Der findes nemlig en løsning med $0 \leq x \leq q - 1$, og der gælder så $yq = z - xp > (pq - p - q) - (q - 1)p = -q$, hvoraf følger $y > -1$, eller $y \geq 0$.

Det største portobeløb der ikke kan dannes, er så $pq - p - q$.

8. Et tal t har formen $4n + 3$ hvis og kun hvis $t \equiv -1 \pmod 4$. Alle t's primfaktorer er ulige, og mindst én af dem er kongruent med -1, for hvis de alle var kongruente med 1, blev produktet kongruent med 1. Antag at der kun var endeligt mange primtal $p_1, p_2, \ldots, p_k$ kongruente med -1. Så ville $(p_1p_2 \cdots p_k)^2+2$ være kongruent med -1, men dette tal er ikke deleligt med noget af tallene $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Modstrid.