

# GEORG MOHR KONKURRENCEN 2001

Vinderseminar, Århus 28/02 – 3/03

---

## OPGAVER

1. Hvad er matematisk induktion for noget? Hvis du ikke kender svaret, så find selv ud af det.  
Vis ved induktion, at  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ .
2. Gør rede for, at hvis et ulige helt tal  $n$  kan skrives som en sum af to kvadrattal, da er  $n \equiv 1 \pmod{4}$ .
3. Om en funktion  $f$  gælder, at  $f(x) + x \cdot f(1-x) = x$  for alle reelle tal  $x$ .  
Bestem tallet  $f(2)$ .  
Find en forskrift for  $f$ .
4. Vis, at der blandt 5 punkter i et kvadrat med sidelængde 2 må være to punkter, hvis afstand højst er  $\sqrt{2}$ .
5. Vis, at hvis  $x$  ikke er kongruent med 0 mod 3, så er  $x^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$ .
6. Vis, at  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$  for alle naturlige tal  $n$ .  
(Kan fx vises ved integralregning og induktion)
7. Ni personer kan hver højst tale tre sprog. Hver gang man udtager tre af de ni, har mindst to af dem et sprog tilfælles.  
Gør rede for, at mindst tre personer taler samme sprog.
8. Vis, at der i en ikke-stumpvinklet trekant  $ABC$  gælder, at  $\sin A + \sin B + \sin C > 2$ .
9. Gør rede for, at der findes et naturligt tal med lutter 1-taller  $n = 111\dots 1$ , hvori 7 går op. Gælder det også for ethvert primtal  $p \neq 2, 5$ ?

10.

Firkant  $ABCD$  er indskrevet i en cirkel med radius  $r$ . Skæringspunktet mellem diagonalerne  $AC$  og  $BD$  kaldes  $E$ .

Vis, at

$$AC \perp BD \Rightarrow EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4r^2.$$

Gælder pilen den anden vej  $\Leftarrow$ ?

