

Opgaver i uligheder og funktionalligninger

Vinderseminar 2005

Uligheder

1. Vis

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$$

for positive tal x, y og z .

2. Vis

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2}$$

for alle positive tal x_1, x_2, \dots, x_n .

(Hint: Benyt Cauchy-Schwartz på smarte vektorer.)

3. Vis for $a > b > 0$ at

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}$$

4. Vis

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64$$

når x, y og z er positive tal med $x + y + z = 1$.

5. Løs ligningen

$$abc = (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

når a, b og c er positive tal.

6. Vis at det aritmetiske gennemsnit a af x_1, \dots, x_n opfylder

$$(x_1 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2 \leq \frac{1}{2}(|x_1 - a| + \cdots + |x_n - a|)^2$$

Funktionalligninger

7. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ forskellige fra nulfunktionen så

$$f(x)f(y) = f(x-y)$$

for alle reelle tal x og y .

8. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ så

$$(i) \quad f(1) = 1$$

$$(ii) \quad f\left(\frac{1}{x+y}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{for alle } x, y, x+y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(iii) \quad (x+y)f(x+y) = xyf(x)f(y) \quad \text{for alle } x, y, x+y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

9. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ så

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

for alle reelle tal x og y .

10. Find alle funktioner $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ så

$$f(f(n)) = n + 2$$

for alle naturlige tal n .