

Opgaver i uligheder og funktionalligninger — løsninger

Vinderseminar 2005

Uligheder

1. A-G uligheden giver $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3x^2y$. Tilsvarende gælder $y^3 + y^3 + z^3 \geq 3y^2z$ og $z^3 + z^3 + x^3 \geq 3z^2x$. Summeres disse tre uligheder fås $3(x^3 + y^3 + z^3) \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x)$.

2. Sæt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1 + x_2} \\ \sqrt{x_2 + x_3} \\ \vdots \\ \sqrt{x_n + x_1} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1 + x_2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2 + x_3}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{\sqrt{x_n + x_1}} \end{pmatrix}$$

Så er

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \right) \geq$$
$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

- 3.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$$
$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a-b}{\sqrt{8a}} < \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{8a}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} < 2\sqrt{a}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{b} < \sqrt{a}$$

Den anden ulighed er tilsvarende.

4. A-G uligheden giver $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, dvs. $\frac{1}{xyz} \geq 27$.

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz}$$
$$= 1 + \frac{xy + yz + zx}{xyz} + \frac{x + y + z}{xyz} + \frac{1}{xyz} \geq 1 + 3 \frac{\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}}{xyz} + \frac{2}{xyz}$$
$$= 1 + 3 \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} + \frac{2}{xyz} \geq 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 27 = 64$$

5. Antag et af tallene $a + b - c$, $b + c - a$ og $c + a - b$ er negativt. Lad os sige $a + b - c < 0$.

$$\begin{aligned} a + b - c < 0 &\Rightarrow c > a + b \wedge b + c - a > 0 \wedge c + a - b > 0 \\ &\Rightarrow (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = abc < 0 \end{aligned}$$

Men det strider mod $abc > 0$.

$$(a + b - c)(a - b + c) = a^2 - (b - c)^2 \leq a^2 \quad (1)$$

$$(b + c - a)(b - c + a) = b^2 - (c - a)^2 \leq b^2 \quad (2)$$

$$(c + a - b)(c - a + b) = c^2 - (a - b)^2 \leq c^2 \quad (3)$$

Ved at gange disse tre uligheder og tage kvadratroden fås

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$$

Lighedstegn kræver lighedstegn ved (1), (2) og (3), dvs. $a = b = c$. Det er den eneste mulige løsning. Omvendt ses $a = b = c$ også at være en løsning.

6. Sæt $y_i = x_i - a$. Så er $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$. Vi kan antage $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k \leq 0 \leq y_{k+1} \leq \dots \leq y_n$. Sæt $y_1 + y_2 + \dots + y_k = -z$. Så er $y_{k+1} + \dots + y_n = z$ og

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 &\leq (y_1 + y_2 + \dots + y_k)^2 + (y_{k+1} + \dots + y_n)^2 = 2z^2 \\ &= \frac{1}{2}(2z)^2 = \frac{1}{2}(|y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|)^2 \end{aligned}$$

Funktionalligninger

7. Tag x_0 så $f(x_0) \neq 0$. Fra $f(x_0)f(0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ fås $f(0) = 1$. Eftersom $f(x)f(x) = f(x - x) = f(0)$ er $f(x) \neq 0$ for alle x . Endelig giver $f(x)f(x/2) = f(x - x/2) = f(x/2)$ at $f(x) = 1$ for alle x . Det ses at $f(x) = 1$ opfylder ligningen.

8. Sættes $x = y = \frac{1}{2}z$ i (ii) fås

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = 2f\left(\frac{z}{2}\right) \quad (1)$$

for alle $z \neq 0$. Sættes $x = y = \frac{1}{z}$ i (iii) fås

$$\frac{2}{z}f\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{z^2}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^2$$

for alle $z \neq 0$, og dermed

$$2f\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{z}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^2 \quad (2)$$

Kombineres (1) og (2) fås

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^2$$

eller ækvivalent

$$f(x) = x\left(f(x)\right)^2 \quad (3)$$

for $x \neq 0$. Hvis der findes et x så $f(x) = 0$ giver (iii) at

$$f(1) = (x + (1 - x))f(x + (1 - x)) = x(1 - x)f(x)f(1 - x) = 0$$

der er i modstrid med (i). Dermed er $f(x) \neq 0$ for alle x , og (3) giver $f(x) = \frac{1}{x}$ for alle x . Det ses at denne funktion opfylder alle betingelserne.

9. Indsættes $x = 0$ fås $f(f(y)) = (f(0))^2 + y$, dvs. f er surjektiv. Der findes derfor et x_0 så $f(x_0) = 0$. Sættes $x = x_0$ fås $f(f(y)) = y$. Indsættes nu $f(x)$ i stedet for x fås (idet $f(f(y)) = y$)

$$f(xf(x) + y) = x^2 + y$$

Trækkes denne ligning fra den oprindelige fås $(f(x))^2 = x^2$, dvs. $f(x) = \pm x$ for ethvert x . Antag at vi har x og y begge forskellige fra nul således at $f(x) = -x$ og $f(y) = y$. Så giver den oprindelige ligning at $f(-x^2 + y) = x^2 + y$, hvilket er i modstrid med $f(-x^2 + y) = \pm(-x^2 + y)$. Vi kan derfor konkludere at $f(x) = x$ for alle x eller $f(x) = -x$ for alle x . Det ses at begge disse funktioner opfylder betingelsen.

10. Vi har $f(n) + 2 = f(f(f(n))) = f(n + 2)$. Dvs. f er entydigt bestemt ud fra sine værdier på 1 og 2

$$f(n) = \begin{cases} n + d_0 & \text{for } n \equiv 0 \pmod{2} \\ n + d_1 & \text{for } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Antag at $d_1 \equiv 0 \pmod{2}$. Så er $3 = f(f(1)) = f(1 + d_1) = 1 + 2d_1$ og dermed $d_1 = 1$ i modstrid med $d_1 \equiv 0 \pmod{2}$. Vi har derfor $d_1 \equiv 1 \pmod{2}$ og $3 = f(f(1)) = f(1 + d_1) = 1 + d_1 + d_0$, dvs. $d_0 + d_1 = 2$. Men da $d_0 \geq -1$ og $d_1 \geq 0$ (pga. $f(1), f(2) \in \mathbb{N}$) fås $(d_0, d_1) \in \{(1, 1), (-1, 3)\}$. De to talsæt definerer hver deres funktion og ved indsættelse ses at de begge er løsninger:

$$f(f(n)) = n + d_0 + d_1 = n + 2$$

hvor det første lighedstegn følger af $d_0 \equiv d_1 \equiv 1 \pmod{2}$.

Kilder til opgaverne:

1-5 (benyttet ved vinderseminaret i '99); 6-7 BW '97 ; 8 BW '95; 9 Japan final round 2004 ; 10 Spanien local round 2004 .