Georg Mohr-Konkurrencens Vinderseminar 2005 Opgaver i talteori

1. Vis at brøken
$$\frac{8342267}{8342591}$$
er uforkortelig.

2. Familien Petersen har seks børn. Produktet af børnenes aldre er 31185, og alle børnene har forskellige aldre. Den ældste er 15 år. Hvor gammel er den yngste?

3. Lad p og q være to på hinanden følgende ulige primtal. Bevis at $p+q$ kan skrives som et produkt af tre (ikke nødvendigvis forskellige) naturlige tal større end 1.

4. Du starter med tallet 12 og har lov til udføre følgende operationer: P: lægge 3 til dit tal, G: gange dit tal med 4, D: dividere dit tal med 5 hvis det er deleligt med 5, M: trække 6 fra tallet. Du må udføre operationerne så mange gange du vil, og i en hvilken som helst rækkefølge. Hvilket af følgende tal er det ikke muligt at nå frem til ved denne procedure: A) 272 B) 36 C) 768 D) 2004 E) -159 ?

5. Bevis at 72 går op i ethvert tal af formen
$$9^n + 63 \quad ,$$
hvor $n \in N$.

6. Hvad er sidste ciffer i tallet
$$237^{236} \cdot 236^{237} \quad ?$$

7. Bestem det ukendte ciffer c så
$$1c02756 = (3 \cdot (416 + c))^2 \quad .$$

8. I en retvinklet trekant hvori alle sidelængder er hele tal, har den ene katete længden 1994.

   Bestem længden af hypotenusen.

9. Findes der et naturligt tal n så at tallet $n!$ har præcis 11 nuller til slut?

10. a) Vis at ligningen
$$2003^n \cdot 2005^m = 2007^k$$
ikke løsninger med naturlige tal n, m og k.
b) Samme opgave for ligningen
$$2003^n + 2005^m = 2007^k \quad .$$

11. a) Bevis at tolv kvinter *ikke* er det samme som syv oktaver. (For hver gang man går en oktav opad, fordobles tonens frekvens; for hver gang man går en kvint opad, ganges tonens frekvens med $\frac{3}{2}$.)
b) Bevis at der ikke findes naturlige tal n og m således at n rene kvinter er det samme som m oktaver.

12. Tallene n og m er indbyrdes primiske. Hvis tallene $3n - m$ og $5n + 2m$ ikke er indbyrdes primiske, hvad er så deres største fælles divisor?

13. Bevis at 31 ikke går op i noget tal af formen $2^n + 1$, hvor n er et naturligt tal.

14. Peter kører i elevator i et hus med uendelig mange etager og uendelig mange kælderetager. Han vælger altid at køre enten 38 etager op eller ned, eller 175 etager op eller ned. Hvis han starter i stueetagen, er det så muligt for ham ved denne procedure at ende på 158. etage?

15. I en hat ligger 1992 sedler med alle numre fra 1 til 1992. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differensen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel, som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kasseres. Der fortsættes på denne måde indtil der kun er én seddel tilbage.

    Vis at der på denne sidste seddel står et lige tal.

16. Et rektangel kan opdeles i n ens kvadrater. Det samme rektangel kan også opdeles i $n + 76$ ens kvadrater. Find n.

17. Lad der være givet fem punkter i planen med heltallige koordinater. Vis at en af forbindelseslinierne mellem punkterne går gennem et punkt med heltallige koordinater.