

Georg Mohr-Konkurrencens Vinderseminar 2005  
Opgaver i talteori  
Løsninger

1. Vis at brøken  $\frac{8342267}{8342591}$  er uforkortelig.

*Løsning:* Enhver fælles divisor for tæller og nævner går også op i differensen  $8342591 - 8342267 = 324 = 2^2 \cdot 3^4$ . Eneste mulige primfaktorer i en eventuel fælles divisor større end 1 er altså 2 og 3, men tælleren (og nævneren) er tydeligvis ikke delelig med hverken 2 eller 3.

2. Familien Petersen har seks børn. Produktet af børnenes aldre er 31185, og alle børnene har forskellige aldre. Den ældste er 15 år. Hvor gammel er den yngste?

*Løsning:* Eneste mulighed for at kombinere primfaktorerne i  $31185 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  til forskellige aldre, hvoraf 15 skal være den højeste, er  $31185 = 3 \cdot 7 \cdot (3 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 15$ . Det yngste barn må folgelig være 1 år.

3. Lad  $p$  og  $q$  være to på hinanden følgende ulige primtal. Bevis at  $p+q$  kan skrives som et produkt af tre (ikke nødvendigvis forskellige) naturlige tal større end 1.

*Løsning:* Da  $p+q$  er lige, kan  $p+q$  skrives som  $2 \cdot n$ , hvor  $n$  er et helt tal. Da tallet  $n = (p+q)/2$  ligger mellem  $p$  og  $q$ , og da  $p$  og  $q$  er på hinanden følgende primtal, er  $n$  ikke et primtal. Så er  $n$  et sammensat tal. Altså kan  $n$  skrives som et produkt af to faktorer, og  $p+q = 2 \cdot n$  dermed som et produkt af tre.

4. Du starter med tallet 12 og har lov til udføre følgende operationer: P: lægge 3 til dit tal, G: gange dit tal med 4, D: dividere dit tal med 5 hvis det er deleligt med 5, M: trække 6 fra tallet. Du må udføre operationerne så mange gange du vil, og i en hvilken som helst rækkefølge. Hvilket af følgende tal er det ikke muligt at nå frem til ved denne procedure: A) 272 B) 36 C) 768 D) 2004 E) -159 ?

*Løsning:* (GMMC04) Alle operationerne bevarer delelighed med 3. Resultatet 272 vil derfor aldrig kunne optræde.

5. Bevis at 72 går op i ethvert tal af formen  $9^n + 63$ , hvor  $n \in \mathbb{N}$ .

*Løsning:* Da  $72 = 8 \cdot 9$ , og tallene 8 og 9 er indbyrdes primiske, skal vi blot vise at både 8 og 9 går op i  $9^n + 63$ . Dette gøres let ved regning modulo 8:  $9^n + 63 \equiv 1^n + 63 \equiv 1 + 63 = 64 \equiv 0 \pmod{8}$ , og modulo 9:  $9^n + 63 \equiv 0^n + 0 = 0 \pmod{9}$ .

6. Hvad er sidste ciffer i tallet  $237^{236} \cdot 236^{237}$ ?

*Løsning:* Vi regner modulo 10. Første faktor:  $237^{236} \equiv 7^{236} \equiv 1$ , idet  $7^4 = 2401 \equiv 1$ , og 236 er deleligt med 4. Anden faktor:  $236^{237} \equiv 6$ , da  $6^2 = 36 \equiv 6$  osv. Ialt:  $237^{236} \cdot 236^{237} \equiv 6$ , dvs. sidste ciffer er 6.

7. Bestem det ukendte ciffer  $c$  så  $1c02756 = (3 \cdot (416 + c))^2$ .

*Løsning:* Da 9 går op i tallet på højre side, må 9 også gå op i tallet på venstre side. Eneste mulighed for  $c$  er da (tværsumsreglen)  $c = 6$ , og dette ciffer stemmer faktisk:  $1602756 = (3 \cdot (416 + 6))^2$ .

8. I en retvinklet trekant hvori alle sidelængder er hele tal, har den ene katete længden 1994. Bestem længden af hypotenusen.

*Løsning:* (GM 1994) Kaldes hypotenusen  $c$  og den ukendte katete  $a$ , har vi  $1994^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a)$ . Bemærk at tallene  $c-a$  og  $c+a$  begge er lige (da deres produkt er lige, er nemlig mindst et af dem lige, og da deres differens er lige, må det andet også være det). ved division med  $2^2$  fås

$$997^2 = \frac{c-a}{2} \cdot \frac{c+a}{2},$$

hvor faktorerne på højre side er hele og forskellige. Da 997 er et primtal, er  $1 \cdot 997^2$  den eneste mulige opspaltning af den ønskede art. Vi får altså  $(c-a)/2 = 1$  og  $(c+a)/2 = 997^2$ , hvoraf ved addition  $c = 1 + 997^2 = 1 + (1000 - 3)^2 = 994010$ .

9. Findes der et naturligt tal  $n$  så at tallet  $n!$  har præcis 11 nuller til slut?

*Løsning:* (GM 2001) Nej. Antallet af slutnuller er lig med antallet af 5-taller i primfaktoriseringen af tallet  $n!$  (idet hvert 5-tal kombineret med et 2-tal giver en faktor 10). Vi ser at  $45!$ ,  $46!$ , ...,  $49!$  hver slutter på 10 nuller, hvorimod  $50!$  slutter på 12, da faktoren 50 bidrager med to 5-taller til primfaktoropløsningen.

10. a) Vis at ligningen  $2003^n \cdot 2005^m = 2007^k$  ikke har løsninger med naturlige tal  $n$ ,  $m$  og  $k$ .

b) Samme opgave for ligningen  $2003^n + 2005^m = 2007^k$ .

*Løsning:* Den første: 5 går op på venstre side, men ikke på højre. Den anden: venstre side er lige, højre er ulige.

11. a) Bevis at tolv kvinter *ikke* er det samme som syv oktaver. (For hver gang man går en oktav opad, fordobles tonens frekvens; for hver gang man går en kvint opad, ganges tonens frekvens med  $\frac{3}{2}$ .)

b) Bevis at der ikke findes naturlige tal  $n$  og  $m$  således at  $n$  rene kvinter er det samme som  $m$  oktaver.

*Løsning:* (At tolv kvinter ikke præcis er lig med syv oktaver er et grundlæggende musikteoretisk problem. Det medfører f.eks. at det ikke er muligt at stemme et klaver så at både alle oktaver og alle kvinter er rene.) a) Ligningen  $(\frac{3}{2})^{12} = 2^7$  er ensbetydende med  $3^{12} = 2^{7+12}$ . Men de to tal er ikke ens, da de har forskellige primfaktoropløsninger. b) På samme måde:  $3^n = 2^{n+m}$  kan ikke lade sig gøre.

12. Tallene  $n$  og  $m$  er indbyrdes primiske. Hvis tallene  $3n - m$  og  $5n + 2m$  ikke er indbyrdes primiske, hvad er så deres største fælles divisor?

*Løsning:* Lad  $d$  være største fælles divisor for  $3n - m$  og  $5n + 2m$ . Da  $3n - m \equiv 0 \pmod{d}$  og  $5n + 2m \equiv 0 \pmod{d}$ , gælder også  $11n = 2(3n - m) + (5n + 2m) \equiv 0 \pmod{d}$  og dermed  $11m = 3(5n + 2m) - 5(3n - m) \equiv 0 \pmod{d}$ . Altså  $d|11n$  og  $d|11m$ . Da  $n$  og  $m$  er indbyrdes primiske, må  $d$  være lig med 11.

13. Bevis at 31 ikke går op i noget tal af formen  $2^n + 1$ , hvor  $n$  er et naturligt tal.

*Løsning:* At  $31|2^n + 1$  er ensbetydende med at  $2^n \equiv -1 \pmod{31}$ . Når vi regner modulo 31, gælder imidlertid  $2^0 \equiv 1$ ,  $2^1 \equiv 2$ ,  $2^2 \equiv 4$ ,  $2^3 \equiv 8$ ,  $2^4 \equiv 16$ ,  $2^5 \equiv 32 \equiv 1$ , og dermed  $2^6 \equiv 2$  osv. En toerpotens er dermed aldrig kongruent med  $-1$  modulo 31.

14. Peter kører i elevator i et hus med uendelig mange etager og uendelig mange kælderetager. Han vælger altid at køre enten 38 etager op eller ned, eller 175 etager op eller ned. Hvis han starter i stueetagen, er det så muligt for ham ved denne procedure at ende på 158. etage?

*Løsning:* Ja. Da 38 og 175 er indbyrdes primiske, findes hele tal  $x$  og  $y$  med  $38x + 175y = 1$ . Det er altså muligt at komme fra en given etage til etagen lige ovenover ved hjælp af ture på 38 og 175 etager. Ved at gentage kan man nå til en hvilken som helst etage.

15. I en hat ligger 1992 sedler med alle numre fra 1 til 1992. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differensen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel, som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kasseres. Der fortsættes på denne måde indtil der kun er én seddel tilbage.

Vis at der på denne sidste seddel står et lige tal.

*Løsning:* (GM 1992) Trækkes to lige numre, er differensen  $d$  lige, og antallet af ulige numre ændres derfor ikke. Trækkes et lige og et ulige nummer, er  $d$  ulige; igen vil altså antallet af ulige numre være uændret. Trækkes to ulige numre, er  $d$  lige; antallet af ulige numre reduceres altså med to. Antallet af ulige numre kan således kun ændres ved et fald på to.

Ved starten er der et lige antal ulige numre. Der kan således aldrig blive netop ét ulige nummer tilbage. Derfor må der på den sidste seddel stå et lige nummer.

16. Et rektangel kan opdeles i  $n$  ens kvadrater. Det samme rektangel kan også opdeles i  $n + 76$  ens kvadrater. Find  $n$ .

*Løsning:* (BW 1997) Lad  $ab = n$  og  $cd = n + 76$ , hvor  $a = ux$ ,  $b = uy$ ,  $c = vx$ ,  $d = vy$  er antallet af kvadrater i hver retning. Nu er  $76 = (n + 76) - n = cd - ab = xy(v^2 - u^2) = xy(v - u)(v + u)$ . Da  $76 = 2^2 \cdot 19$  og da  $v - u$  og  $v + u$  er af samme paritet, må vi have  $xy = 4$  og  $v - u = 1$  og  $v + u = 19$ . Så er  $u = 9$  og  $v = 10$ , og vi får  $n = u^2xy = 81 \cdot 4 = 324$ .

17. Lad der være givet fem punkter i planen med heltallige koordinater. Vis at en af forbindelseslinierne mellem punkterne går gennem et punkt med heltallige koordinater.

*Løsning:* Da der kun findes fire forskellige kombinationer af lige og ulige koordinater, må mindst to af de fem punkter have samme paritet af både første- og andenkoordinat. Midtpunktet af forbindelseslinien mellem disse har da heltallige koordinater.