

Georg Mohr-vinderseminar 2005

NMC- “terminsprøve”

Onsdag den 2. marts 2005 kl. 9-13.

Hver opgave giver 5 point.

Skrive- og tegneredskaber er eneste tilladte hjælpemidler.

1. En følge a_1, a_2, \dots af positive hele tal opfylder $a_{a_n} + a_n = 2n$ for alle n . Vis at $a_n = n$ for alle n .
2. Lad C være et indre punkt på et linjestykke AB . En ret linje gennem C som ikke er linjen AB eller vinkelret på denne, skærer cirklen med diameter AB i punkterne E og F , cirklen med diameter AC i punkterne C og M , og cirklen med diameter BC i punkterne C og N . Vis at $|EM| = |FN|$.
3. Bestem alle voksende reelle funktioner f defineret for de reelle tal som opfylder

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

for alle reelle tal x og y .

(En voksende reel funktion f defineret for de reelle tal opfylder $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ for alle reelle tal x og y).

4. I en klasse med n elever går k gange, hvor $k \geq 2$, en gruppe af mindst to elever i byen sammen. Hvert par af elever er i byen sammen nøjagtig én gang. Vis at $k \geq n$.