Georg Mohr-vinderseminar 2005

Løsninger til NMC-"terminsprøve"

1. Da a_{a_n} og a_n er positive hele tal, og $a_{a_1}+a_1 = 2\cdot 1 = 2$, er $a_1 = 1$. Antag nu at $a_i = i$ for $i < n$. Hvis $a_n < n$, følger $a_{a_n}+a_n = a_n+a_n < n+n = 2n$ i modstrid med hvad der er forudsat. Hvis $a_n > n$, følger $a_{a_n} = 2n - a_n < 2n - n = n$ og dermed $a_{a_{a_n}} + a_{a_n} = a_{a_n} + a_{a_n} = 2a_{a_n} < 2n < 2a_n$, igen en modstrid. Altså $a_n = n$. Påstanden følger så ved induktion.

2. Forlæng AM til skæring med med cirklen med diameter AB i P. Da vinklerne AMC og APB begge er rette, er PB parallel med EF, og trapezet $FPBE$ dermed ligesidet. Da også $\angle BNC$ er ret, er trekanterne EPM og FBN så kongruente. Følgelig $|EM| = |FN|$.

3. Med $z = x + f(y)$ fås $f(f(z)) = f(f(x + f(y))) = f(f(x) + y) = x + f(y) = z$. Hvis nu $f(z) < z$, ville der da f er voksende, gælde $z = f(f(z)) < f(z)$, en modstrid. På tilsvarende måde udelukkes $f(z) > z$. Altså $f(z) = z$, eller $x + f(y) = f(x + f(y)) = f(x) + y$, eller $f(x) - x = f(y) - y$. $f(x) - x$ er altså konstant.

   Med $x = y = 0$ fås $f(f(0)) = f(0)$. Heraf følger $f(0) = 0$ da f er voksende og dermed injektiv. Altså $f(x) - x = f(0) - 0 = 0 - 0 = 0$, eller $f(x) = x$ for alle x.

   Funktionen $f(x) = x$ er voksende og opfylder funktionalligningen. Den er dermed den eneste sådanne funktion.

4. Lad $g(x)$ betegne antallet af gange eleven x er i byen, $D(t)$ mængden af deltagere i byturen t, og $d(t)$ deres antal.

   Hvis alle klassens elever var med på én af turene, ville der da $k \geq 2$, være et par af eleverne der var sammen både på denne tur og en anden. Altså $d(t) < n$. Dette udelukker $g(x) = 1$ fordi alle eleverne ellers måtte være med på denne ene tur. Der findes så en elev y og en elev z som er sammen med x to forskellige ture, og $y \neq z$ fordi x og y ellers var sammen på begge ture. Hverken y eller z er med på begge ture fordi x så ville være sammen med én af dem begge gange. Dermed er der en tur hvor y og z er sammen og x ikke med. Følgelig $g(x) < k$.

   Vi har så

$$\sum_{\substack{(x,t)\\ x\in D(t)}} 1 = \sum_x g(x) = \sum_{\substack{(x,t)\\ x\notin D(t)}} \frac{g(x)}{k-g(x)} = \sum_t d(t) = \sum_{\substack{(x,t)\\ x\notin D(t)}} \frac{d(t)}{n-d(t)}.$$

   Hvis $x \notin D(t)$, er x sammen med eleverne i $D(t)$ på forskellige byture fordi to elever i $D(t)$ ellers ville være sammen i byen sammen både på turen t, hvor x ikke er med, og på en tur sammen med x. Følgelig $g(x) \geq d(t)$. Hvis så $k < n$, følger

$$\frac{g(x)}{k-g(x)} > \frac{d(t)}{n-d(t)}$$

   i modstrid med ovenstående. Altså $k \geq n$.