Opgaver i kombinatorik

Georg Mohr-vinderseminar 2005

1. Du har et ringspil med 8 forskellige kasteringe og fire forskellige målpinde. Hvor mange forskellige slutkonfigurationer er der med 5 ringe på pindene og 3 på græsset?

2. Der skal bygges 25 byer på 13 øer, mindst en på hver. Der skal etableres færgeforbindelse mellem hvert par af byer på forskellige øer. Hvad er det mindst mulige antal forbindelser?

3. Tolv kort ligger på en række. Der er tre forskellige slags kort, nemlig kort med begge sider hvide, begge sider sorte og med en hvid og en sort side. Til at begynde med har ni af de tolv kort en sort side opad. Kortene 1–6 vendes, og derefter har fire af de tolv kort en sort side opad. Nu vendes kortene 4–9, og så har seks kort en sort side opad. Til slut vendes kortene 1–3 og 10–12, og nu har fem af kortene en sort side opad. Hvor mange kort er der af hver slags?

4. 15 gæster med forskellige navne sidder ved et rundt bord, men de har ikke lagt mærke til, at der er navneskilte ved pladserne. Alle sidder forkert! Vis, at bordet kan drejes, så mindst to sidder rigtigt.

5. Hvor mange permutationer af $1,\dots,n$ er fikspunktsfri (intet tal afbildes på sig selv)?

6. En stor terning med sidelængde 5 er sat sammen af enhedsterninger. To små terninger er naboer, hvis de har en flade fælles. Hvis man starter i en nabo til en hjørneterning, kan man da besøge alle de små terninger netop én gang ved at bevæge sig fra nabo til nabo?

7. Til at starte med har n personer hver deres hemmelighed. De vil nu dele hemmelighederne med hinanden ved at sende personlige breve. Hvad er det mindste antal breve, de skal sende?

8. 33 brikker er fordelt på et 5×9-bræt, højst en på hvert felt. Nu udføres en række ture, i hver tur skal hver brik flyttes et felt, og ved turens afslutning skal der igen være højst en brik på hvert felt. Hver brik flyttes turvis op/ned og venstre/højre. En brik kan således flytte fx O, V, O, H, N, osv. i tur nr. 1, 2, ...
Vis, at der kun kan udføres endeligt mange ture.

9. Tre spillere spiller et spil. De har tre kort med tre forskellige positive heltal. Hver runde deles kortene tilfældigt ud til spillerne, og hver spiller modtager det antal jetoner, som hans kort angiver. Efter to eller flere runder har spillerne hhv. 20, 10 og 9 jetoner. I den sidste runde fik spilleren med 10 jetoner det højeste kort. Hvilken spiller fik det mellemste kort i første runde?

10. 11 bands optræder ved en festival. På en dag hvor et band holder fri, ser de alle de bands, der optræder pågældende dag. På en dag hvor et band optræder, når de ikke at se nogen optræde. Hvert band ser alle andre i løbet af festivalen. Hvor mange dage har denne så mindst varet?

11. En permutation $\sigma \in S_{2n}$ siges at have egenskaben P, hvis der findes $i \in \{1,2,\dots,2n-1\}$, så $|\sigma(i)-\sigma(i+1)| = n$. Vis, at mere end halvdelen af permutationerne i S_{2n} har egenskaben P.