

Løsninger til kombinatorikopgaver

1. (AIME2 2000) De 5 ringe på pindene kan fordeles på følgende måder: (a) 5000, (b) 4100, (c) 3200, (d) 3110, (e) 2210, (f) 2111. Der er 4 af (a) og (f), 12 af de andre. Ialt $(2 \cdot 4 + 4 \cdot 12) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 376320$ muligheder.

2. (BW1994) Antag, vi har givet en konfiguration, hvor der er to øer med mere end en by. Lad antallet af byer på de to øer være n_1 og n_2 , hvor $2 \leq n_1 \leq n_2$. Ved at flytte en by fra ø 1 til ø 2 kan vi spare n_2 forbindelser mod at oprette $n_1 - 1$ nye. Det mindste antal forbindelser opnås altså, når der er én by på 12 af øerne og 13 byer på den sidste. Dette antal er så $12 \cdot 13 + \binom{12}{2} = 222$.

3. (BW1997) Lad 0 og 1 betegne, at et kort ligger med den oprindelige side opad, eller er vendt. Vi har nu følgende billede,

000000000000, 111111000000, 111000111000, 000000111111,

hvor der er hhv. 9, 4, 6 og 5 sorte sider synlige. Inddel kortene i fire typer, A(hvid/hvid), B(hvid/sort), C(sort/hvid), D(sort/sort), efter 0/1-sidens farve. Lad a_i, b_i, c_i, d_i være antallet af kort af den pågældende type blandt kortene $3i - 2, 3i - 1, 3i$ for $i = 1, 2, 3, 4$ (1-3, 4-6, 7-9, 10-12). Vi har da ligningerne

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= 9, \\b_1 + b_2 + c_3 + c_4 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= 4, \\b_1 + c_2 + b_3 + c_4 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= 6, \\c_1 + c_2 + b_3 + b_4 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= 5.\end{aligned}$$

Første ligning skrives $\sum c + \sum d = 9$, anden plus fjerde ligning skrives $\sum b + \sum c + 2\sum d = 9$. Da er $\sum b + \sum d = 0$, så der er ingen kort af type B og D, $\sum c = 9$, dvs. 9 kort af type C og dermed 3 af type A.

4. (CanMO1975) Bordet kan drejes i 15 positioner. Alle gæsterne sidder korrekt i én af disse. Ingen sidder korrekt i den givne, så der er 14 placeringer til deling blandt 15 gæster – ved skuffeprikket findes altså en position, hvor mindst to sidder rigtigt.

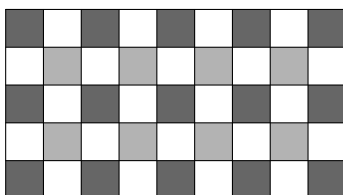
5. Brug PIE! Antallet af permutationer, der fikser k bestemte tal er $(n - k)!$, så det ønskede antal er

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}0! = n!(1 - 1/1! + 1/2! - \dots + (-1)^n/n!).$$

6. (Sverige1998) Nej. Farv de små terninger skiftevis sorte og hvide, med hjørneterningerne hvide. Der er da flere hvide end sorte terninger. Men en sti skal starte på en sort og skiftevis besøge hvide og sorte terninger.

7. (CanMO1971) Alle skal modtage $n - 1$ hemmeligheder. Efter $n - 2$ breve er sendt og modtaget, mangler alle stadig at modtage mindst et brev, da disse første breve kun kan omhandle $n - 2$ hemmeligheder. Der skal altså mindst skrives $2n - 2$ breve. At dette er tilstrækkeligt ses ved følgende princip: først sendes $n - 1$ breve $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, n - 1 \rightarrow n$, hvorefter person n kender alle hemmeligheder. Vedkommende bruger nu $n - 1$ breve på at underrette de andre.

8. (Irish1996) Farvelæg brættet som vist:



Der er 8 lyse, 15 mørke og 22 hvide felter. En brik på et mørkt felt skal flytte til et hvidt og derefter til et lyst felt. Så med mere end 8 brikker på mørke felter kan man højst udføre én tur. Brikker på hvide felter rykker til lyse og mørke felter, så med mere end 16 brikker på hvide felter kan man højst udføre to ture. Med mere end $8 + 8 + 16 = 32$ brikker kan man altså ikke udføre tre ture.

9. (IMO1974) Den samlede score, 39, må være lig antallet af runder ganget summen af tallene på kortene. Kortsummen må være mindst $1 + 2 + 3 = 6$, og der er mindst to runder. Da 39 kun har faktorerne 1, 3, 13 og 39, er kortsummen altså 13, og der er 3 runder.

Den højeste score er 20, så det højeste kort er mindst 7. Scoren på 10 indeholder det højeste kort, så dette er højst 8. Det mindste kort er højst 2, for hvis det var højere, da ville det højeste kort være højst $13 - 3 - 4 = 6$. Mulighederne er 2, 3, 8; 2, 4, 7; 1, 4, 8; 1, 5, 7. Kun 1, 4, 8 kan give pointsummen 20. Scorene må være fordelt således: $8 + 8 + 4 = 20$, $8 + 1 + 1 = 10$, $4 + 4 + 1 = 9$. Sidste runde må have givet 4 til spilleren med 20, 8 til spilleren med 10 og 1 til spilleren med 9. I de to første runder fik spilleren med 9 altså det mellemste kort.

10. (CanMO1981) Svar: 6. Generalisér til n bands. Det kan da lade sig gøre på n dage, fx ved at hvert band optræder én af dagene. Notation: $a, b, \dots, e \triangleleft A, B, \dots, E$ betyder, at a, b, \dots, e ser A, B, \dots, E . For $n = 3$ skal vi bruge 3 dage, da $1 \triangleleft 2, 2 \triangleleft 3$ og $3 \triangleleft 1$ må ske på forskellige dage. Antag, at 3 dage er nok for $n = 4$. Så må der være en dag, hvor to bands spiller; uden tab af generalitet spiller band 1 og 2 på dag 1. Så skal vi bruge to dage, hvor $1 \triangleleft 2$ og $2 \triangleleft 1$. Antag $1 \triangleleft 2$ på dag 2, og $2 \triangleleft 1$ på dag 3. Band 1 ser da kun noget dag 2, så 3 og 4 spiller her. Tilsvarende med band 2 og dag 3. Altså ser band 3 og 4 band 1 og 2 på dag 1, men så kan de ikke se hinanden.

For $n = 6$ kan vi nøjes med 4 dage, fx:

$$1, 2, 3 \triangleleft 4, 5, 6 \quad 1, 4, 5 \triangleleft 2, 3, 6 \quad 2, 4, 6 \triangleleft 1, 3, 5 \quad 3, 5, 6 \triangleleft 1, 2, 4.$$

Bemærk, at hvis m dage går for n , da går de også for $n - 1$. Så 4 dage går for $n = 5$, men 4 må være minimum, da vi ellers kunne klare 4 bands på 3 dage.

Vi kan nu klare 12 bands (og dermed også kun 11) på 6 dage:

$$1, 2, 3, A, B, C \triangleleft 4, 5, 6, D, E, F \quad 1, 4, 5, A, D, E \triangleleft 2, 3, 6, B, C, F \quad 2, 4, 6, B, D, F \triangleleft 1, 3, 5, A, C, E \\ 3, 5, 6, C, E, F \triangleleft 1, 2, 4, A, B, D \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6 \triangleleft A, B, C, D, E, F \quad A, B, C, D, E, F \triangleleft 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(Generelt: hvis m dage går for n , da går $m + 2$ for $2n$.)

Vi viser nu, at 5 dage ikke er tilstrækkeligt for $n = 11$. Antag, det går med 5. Hver dag er der enten mindst 6, der ser, eller mindst 6, der optræder. Så der må enten være 3 dage med 6 optrædende, eller 3 dage med 6 hvilende. Overvej, at der da må være 4 bands, som alle optræder på 2 dage eller alle hviler på 2 dage. Men de skal da bruge yderligere 4 dage til at se hinanden. Modstrid.

11. (IMO1989) Lad A_k være mængden af permutationer σ , hvor der findes i , så enten $\sigma(i) = k$, $\sigma(i+1) = k+n$ eller $\sigma(i) = k+n$, $\sigma(i+1) = k$. Da er A , mængden af permutationer opfyldende P , lig foreningsmængden af A_k 'erne. Ved PIE er $|A| = \sum_k |A_k| - \sum_{k < l} |A_k \cap A_l| + \sum_{k < l < m} |A_k \cap A_l \cap A_m| - \dots$. Dette er en alternerende sum med monotont aftagende led, så $|A| \geq \sum_k |A_k| - \sum_{k < l} |A_k \cap A_l|$.

Nu er $|A_k| = 2(2n-1)!$ og $|A_k \cap A_l| = 4(2n-2)!$, så

$$|A| \geq 2n(2n-1)! - 4 \frac{n(n-1)}{2} (2n-2)! = 2n^2(2n-2)! > (2n)!/2.$$

AIME: American Invitational Mathematics Examination, CanMO: Canadian Mathematical Olympiad, Irish: Irish Mathematical Olympiad, Sverige: Skolornas matematiktävling