Om inversion i cirkel

I forlængelse af Jørgen Tornehaves forelæsning tirsdag (28.02) om cirkler og inversion vil jeg gerne gøre opmærksom nogle artikler, der omhandler inversion i cirkel – ved brug af passer og lineal.

Det drejer sig om artiklerne
Bjarne Toft, *Om at tegne en ret linje*, side 220 – 237 i antologien Matematiske Ideer
og
Vagn Lundsgaard Hansen, *Ikke-euklidisk geometri i støbeskeen*, side 47 – 73 (især side 52 ff.) i antologien Matematiske Essays.
Begge antologier er udgivet af Matematiklærerforeningen. Opsøg skolens bibliotek eller spørg din matematiklærer.

Givet en cirkel med centrum O og et indre punkt P.
Med passer og lineal kan du konstruere inversionen af P i cirklen således:

I punktet P oprejses den vinkelrette til linjen gennem O og P. Denne linje – en normal kaldes den - skærer cirklen i punktet A (og B).
Tangenten til cirklen i punktet A skærer halvlinjen gennem O og P i punktet P*.
Punktet P* er da inversionen af P i cirklen og har egenskaben $|OP| \cdot |OP^*| = \text{radius}^2$.
Det indses let ved hjælp af ensvinklede trekanter.

Hvis Q er et punkt *uden* for cirklen, konstrueres et punkt Q* inden i cirklen således:

Konstruer cirklen med diameter OQ. Denne cirkel skærer den oprindelige cirkel i punkterne A og B. Inversionen Q* af Q i cirklen er da den vinkelrette projektion af A (eller B) på linjen gennem O og Q.

Jørgen Tornehave viste at inversion af punkt i cirkel kan foretages med passer alene.

Har du adgang til programmet Geometers Sketchpad, kan du igangsætte filerne Inversion1 (bevæg punktet P og vælg evt. geometrisk sted) og Inversion2 (bevæg punkterne P og Q).
Sidstnævnte omfatter problemet med skæring mellem linjer, som Tornehave nævnte.

Ved inversion i en cirkel med centrum O afbildes:

1) en linje gennem O i sig selv
2) en linje, der ikke går gennem O, i en cirkel gennem O
3) en cirkel gennem O i en linje, der ikke går gennem O
4) en cirkel, som ikke går gennem O, i en cirkel, som ikke går gennem O.

STJ