

GEOMETRI

Generelt om vinkler

Notation for vinkler: $\angle u$, $\angle A$, $\angle BAC$

Topvinkler er lige store, $\angle x = \angle y$

Komplementvinkler er vinkler, der tilsammen er 90° .

Supplementvinkler er vinkler, der tilsammen er 180° .
(I stedet for 180° skriver man ofte π).

Nabovinkler: $\angle BAC$ og $\angle CAD$ er nabovinkler (D ligger på AB 's forlængelse tættest på A). Man siger også, at $\angle CAD$ er *udvendig* vinkel til $\angle A$ i trekant ABC . Bemærk, at $\angle CAD = \angle B + \angle C$. Bemærk endvidere, at vinkelhalveringslinjerne til to nabovinkler står vinkelret på hinanden.

Det følgende er en kortfattet oversigt over nogle vigtige sætninger fra den plane geometri, for det meste uden beviser.

Trekantsulighed: I en trekant er summen af to sider større end den tredje, fx. $a + b > c$.

Kongruens

To figurer (Fig 1 og Fig 2) er *kongruente*, hvis de kan dække hinanden. Det vil her blive skrevet også Fig.1 \cong Fig.2

To *trekanter* er kongruente, når de har

- 1) siderne parvis lige store
- 2) en vinkel og de hosliggende sider parvis lige store.
- 3) en side og de hosliggende vinkler parvis lige store.

Lighedannedhed

opstår f.eks. når to trekanter er *ensvinklede*.

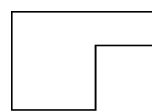
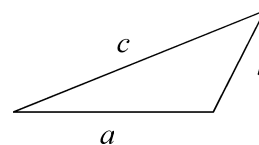
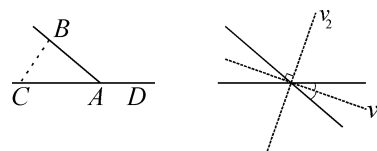
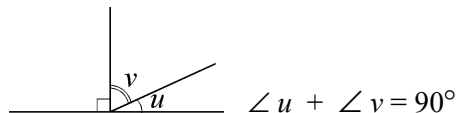
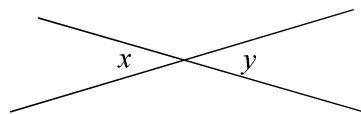
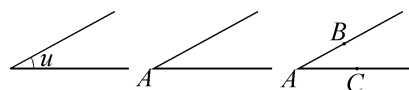
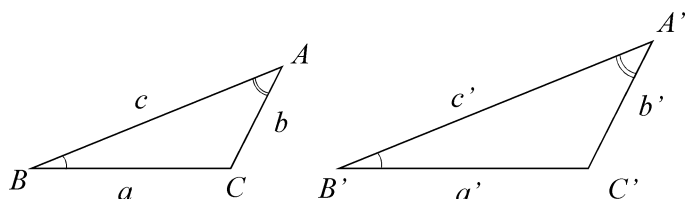
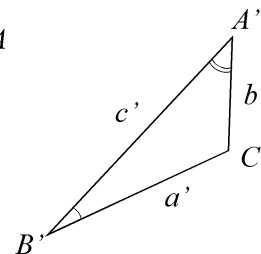
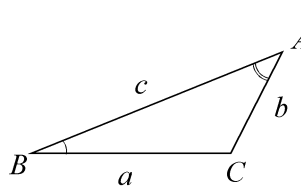


Fig. 1



Fig. 2



Den ene figur er en forstørrelse af den anden, dvs:

$$a' = ka \wedge b' = kb \wedge c' = kc \Leftrightarrow$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} (= k) ..$$

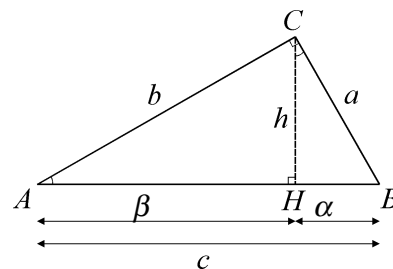
I en retvinklet trekant ABC , hvori $\angle C$ er ret, deler *højden* fra C (CH , hvor H er højdens fodpunkt på AB) trekanten i to indbyrdes og med ABC ensvinklede trekanter. Derfor gælder *højdesætningen*:

$$\frac{h}{\beta} = \frac{\alpha}{h} \Leftrightarrow h^2 = \alpha\beta.$$

Endvidere kan man ved at regne på de ensvinklede trekanter CHB og ABC (og ACH og ABC) indsætte, at

$$a^2 = \alpha c \quad \text{og} \quad b^2 = \beta c,$$

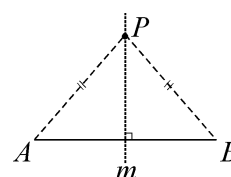
hvoraf *Pythagoras* let følger. Bevis det !



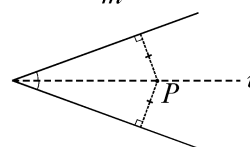
Linjer i en trekant.

Det formodes, at I kender til *midtnormal*, *højde*, *vinkelhalveringslinje* og *median*.

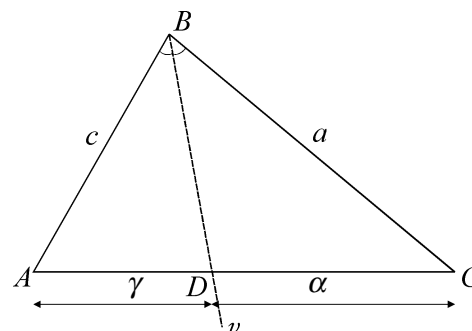
Husk, at midtnormalen til linjestykket AB er det *geometriske sted* for de punkter P (= mængden af punkter P), der har samme afstand til A og B , altså $|PA| = |PB|$.



Og husk, at en *vinkelhalveringslinje* til en vinkel er det *geometriske sted* de punkter, der har samme (vinkelrette) afstand til vinklens ben.



Den indre *vinkelhalveringslinje* til $\angle B$ i trekant ABC skærer den modstående side i punktet D . Da gælder (figur med $|AD| = \alpha$ og $|DC| = \gamma$), at $\alpha/\gamma = a/c$.



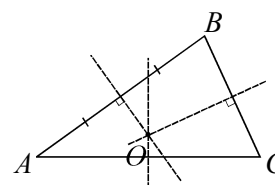
I ord kan det formuleres, at *vinkelhalveringslinjen* *del*er den *modstående side* i *samme forhold* som de *indesluttende sider*.

Det gælder også for *vinkelhalveringslinjen* til den *udvendige* vinkel til $\angle B$. Påstanden kan let vises ved hjælp af sinusrelationer: husk $\sin(\angle ADB) = \sin(\angle BDC)$.

Det er endvidere velkendt, at

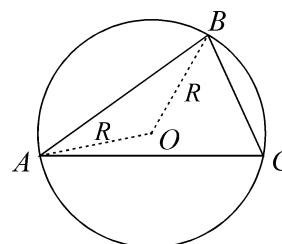
** I en trekant går midtnormalerne igennem samme punkt.*

Dette punkt er centrum for trekantens *omskrevne cirkel*.



Om radius R i den omskrevne cirkel gælder, at

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$



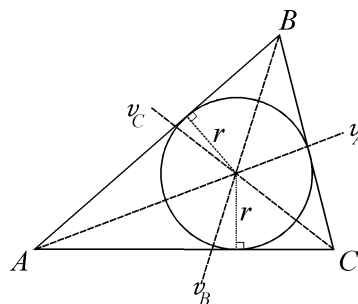
** I en trekant går vinkelhalveringslinjerne gennem samme punkt.*

Dette punkt er centrum for trekantens *indskrevne cirkel*.

Om radius r i den indskrevne cirkel gælder en masse formler. Idet T betegner trekantens areal og s trekantens halve omkreds (perimeter), altså $s = 1/2 \cdot (a + b + c)$, er

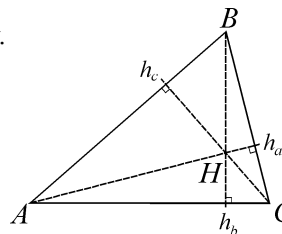
$$T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c) = r \cdot s \quad , \quad \text{hvoraf fås}$$

$$r = \frac{2T}{a + b + c} = \frac{T}{s} .$$



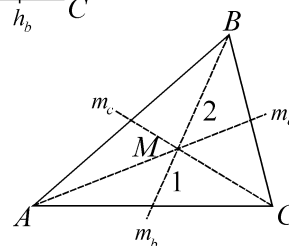
* I en trekant går højderne på siderne igennem samme punkt.

Dette punkt kaldes trekantens *orthocentrum*.



* I en trekant går medianerne igennem samme punkt.

Dette punkt (trekantens tyngdepunkt) deler medianen i forholdet 2:1 regnet fra vinkelspids.



En linie fra en vinkelspids til den modstående side (evt. dens forlængelse) kaldes en *cevia*, opkaldt efter italieneren Giovanni Ceva, der levede i det 17. århundrede. F.eks. er vinkelhalveringslinier, højder og medianer cevianer.

Generelt om skæring mellem linjer i en trekant gælder

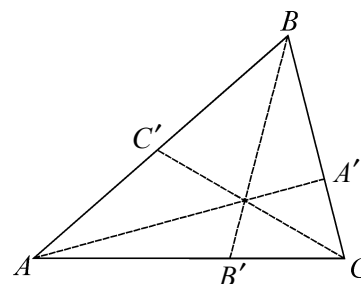
Cevas Sætning: Cevianerne AA' , BB' og CC' (C' ligger på AB , A' ligger på BC osv..) skærer hinanden i samme punkt hvis og kun hvis

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 .$$

(Obs. Længdestregerne er udeladt)

Et bevis for Cevas Sætning kan findes i bogen *Matematiske Essays*. Spørg evt. din matematiklærer. Bemærk, at Cevas sætning straks beviser, at medianerne i en trekant skærer hinanden i samme punkt. At også vinkelhalveringslinierne følger af den tidligere nævnte sætning om, at de deler den modstående side i samme forhold som de indesluttende sider.

Prøv selv at bevise disse påstande.



I en trekant ligger højdernes skæringspunkt H , medianernes skæringspunkt M og midtnormalernes skæringspunkt O på en *ret linje*. Denne linje kaldes trekantens *Euler-linje*.

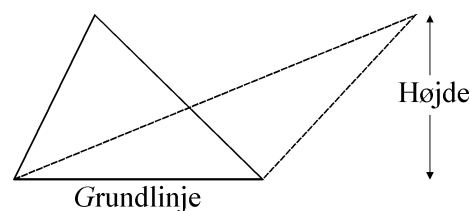
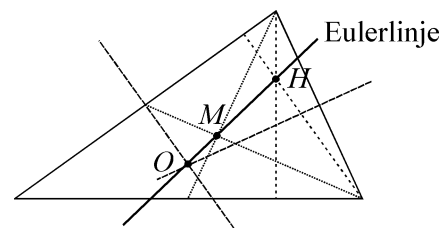
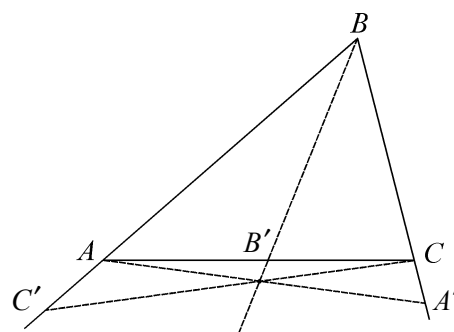
Nogle arealformler

Vigtig observation: Trekanter med samme grundlinje og lige lange højder har samme areal.

Om arealet T af trekant ABC gælder en række formler:

$$T = 1/2 \cdot h_c \cdot c = 1/2 \cdot b \cdot c \cdot \sin A = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

...og mange flere endnu.



Vinkler ved Cirklen

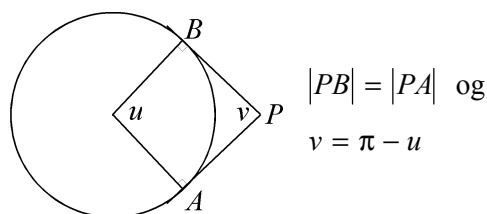
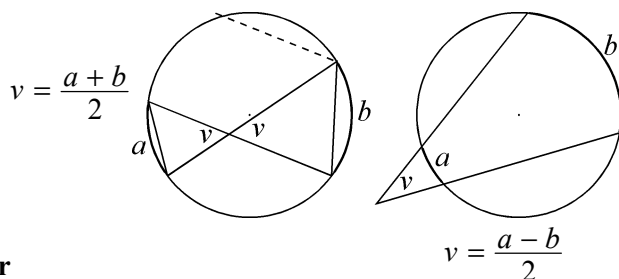
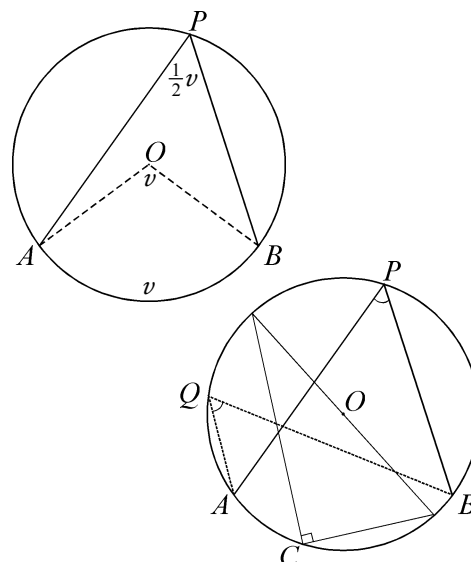
En *centervinkel* måles ved den bue, den spænder over. $\angle AOB$ er en centervinkel og $\angle AOB = \text{bue}AB$.

En *periferivinkel* har toppunkt på cirklen og korder som vinkelben. Det ene vinkelben kan være tangent til cirklen. I det tilfælde taler vi om en *korde-tangent-vinkel*.

En periferivinkel er halv så stor som den bue, den spænder over, altså $\angle APB = \text{bue}AB/2 = 1/2\angle AOB$.

Det samme gælder for en korde-tangent-vinkel.

Bemærk også, at periferivinkler, der spænder over samme bue, er lige store. Og at en periferivinkel, der spænder over "en diameter", er 90° .



Firkanter

En firkant er *indskrivelig* (= har en omskrevet cirkel) hvis og kun hvis summen af de modstående vinkler er 180° , altså at de er supplementvinkler.

Kan du bevise dette ?

Om arealet F af en indskrivelig firkant gælder en slags generaliseret Herons formel:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

hvor $s = 1/2 \cdot (a + b + c + d)$.

Endvidere gælder *Ptolemæus' Sætning* om en indskrivelig firkant

$$|AB||DC| + |BC||AD| = |AC||BD|,$$

altså, at *summen af de modstående sideres produkter er lig med diagonalernes produkt*.

Ptolemæus' sætning kan anvendes til at bevise additionsformlen for sinus: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.

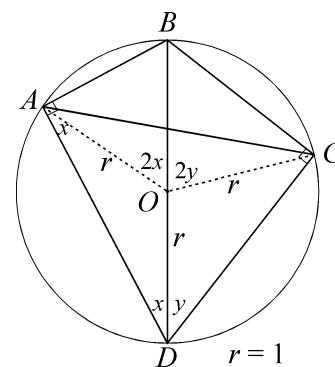
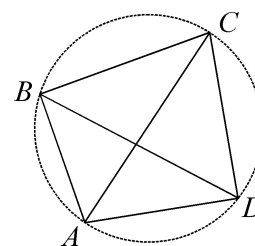
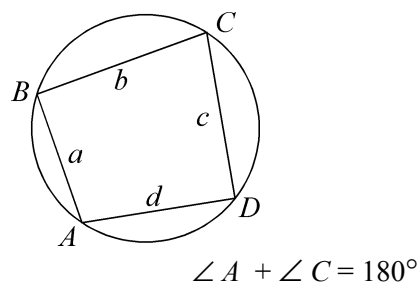
Radius i den omskrevne cirkel er 2:

$|BD| = 2$. Trekkanterne ABD og BCD er retvinklede, så $|AB| = 2 \sin(x)$, $|BC| = 2 \sin(y)$, $|AD| = 2 \cos(x)$, $|CD| = 2 \cos(y)$. Trekant AOC er ligebeinet, $|AO| = |OC| = 1$ og $\angle AOC = 2(x+y)$. Så er $|AC| = 2 \sin(x+y)$.

Ifølge Ptolemæus' sætning gælder

$$2 \sin(x+y) \cdot 2 = |AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = 2 \sin(x) \cdot 2 \cos(y) + 2 \sin(y) \cdot 2 \cos(x),$$

hvorfra additionsformlen straks følger.



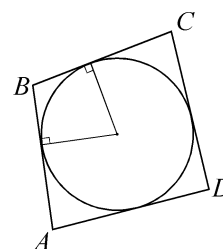
I enhver firkant gælder generelt *Ptolemæos' Ulighed*

$$|AB||DC| + |BC||AD| \geq |AC||BD|.$$

En firkant er *omskrivelig* (= har en indskreven cirkel) hvis og kun hvis summen af et par af modstående sider er lig med summen af "det andet par".

Det kan formuleres: $|AB| + |DC| = |BC| + |AD|$.

Undervejs i et evt. bevis får du brug for, at *tangenter til cirklen er lige lange* - se figuren. Bevis det!



Om en firkant, der *både* er indskrivelig og omskrivelig, gælder en særlig smuk formel for arealet F

$$F = \sqrt{abcd}.$$

Transformationer af trekanter

Enhver trekant kan ved *affine transformationer* (drejning, spejling, multiplikation om punkt, ret affinitet) føres over i en *ligesidet* trekant.

Prøv selv at "hiv" i en trekant, så du får frembragt en ligesidet trekant.

En affin transformation bevarer hverken længder eller arealer, men - og det er væsentligt - den bevarer *areal-forhold* og *længde-forhold* (dog kun for parallelle linjer; specielt bevares længdeforhold på en ret linje).

Som en anvendelse af dette anføres:

Medianerne i en trekant deler trekanten i 6 små trekanter, der har samme areal.

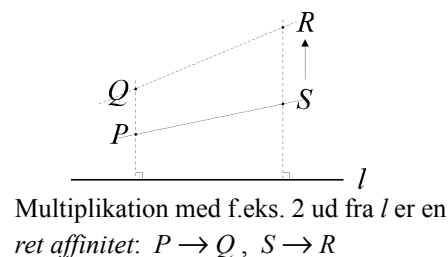
Bevis: Ved en affin transformation føres trekant ABC over i trekant A'B'C'. I trekant ABC betragtes medianen AM₁, hvor M₁ er midtpunktet af BC. Ved transformationen går AM₁ over i A'M₁'. Da en affin transformation *bevarer længdeforhold* på linjer, er forholdet

$B'M_1'/C'M_1' = BM_1/CM_1 = 1$, hvorfor også A'M₁' er en median. Med andre ord har vi vist, at medianer går i medianer.

Derfor går de små "mediantrekanten" over i de små "median-trekanten" i en ligesidet trekant. For at vise, at trekanterne har samme areal (\Leftrightarrow arealforhold = 1), er det nok at vise, at de små mediantrekanten i en ligesidet trekant har samme areal. Det kan du selv gøre!

(Kan selvfølgelig også bevises på en anden - og nok lettere - måde)

--- Du kan få flere oplysninger (og beviser) ved at anvende internettet. Prøv f.eks. <http://mathworld.wolfram.com>



Multiplikation med f.eks. 2 ud fra l er en ret affinitet: $P \rightarrow Q, S \rightarrow R$

