The Viking Battle – Part 1 2015
Version: Norwegian

Oppgave 1 La $n \geq 2$ være et heltall, og la A_n være mengden

$$A_n = \left\{ 2^n - 2^k \middle| k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n \right\}.$$

Bestem det største heltallet M_n som ikke kan skrives som summen av ett eller flere ikke nødvendigvis forskjellige elementer i A_n.

Oppgave 2 Definer funksjonen $f : \langle 0, 1 \rangle \to \langle 0, 1 \rangle$ ved

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{når } x < \frac{1}{2}, \\ x^2 & \text{når } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La a_0 og b_0 være to reelle tall slik at $0 < a_0 < b_0 < 1$. Vi definerer følgene a_n og b_n ved $a_n = f(a_{n-1})$ og $b_n = f(b_{n-1})$ for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vis at det finnes et positivt heltall n slik at

$$(a_n - a_{n-1}) \cdot (b_n - b_{n-1}) < 0.$$

Oppgave 3 La Ω og O være henholdsvis omsirkelen og omsenteret til en spissvinklet trekant ABC med $AB > BC$. Vinkelhalveringslinjen til $\angle ABC$ skjærer Ω i $M \neq B$. La Γ være sirkelen med diameter BM. Vinkelhalveringslinjene til $\angle AOB$ og $\angle BOC$ skjærer Γ i henholdsvis P og Q. Punktet R ligger på PQ slik at $BR = MR$. Vis at $BR \parallel AC$. (Vi antar her at vinkelhalveringslinjer er stråler.)