The Viking Battle - Del 1 2015
Version: Danish

Opgave 1 Lad $n \geq 2$ være et helt tal, og lad A_n være mængden

$$A_n = \{2^n - 2^k | k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n\}.$$

Bestem det største hele tal M_n som ikke kan skrives som en sum af en eller flere ikke nødvendigvis forskellige elementer fra A_n.

Opgave 2 Funtionen $f :]0,1[\to]0,1[$ er defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & , \ x < \frac{1}{2} \\ x^2 & , \ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lad a_0 og b_0 være to reelle tal hvor $0 < a_0 < b_0 < 1$. Følgerne a_n og b_n er givet ved $a_n = f(a_{n-1})$ og $b_n = f(b_{n-1})$ for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vis at der findes et positivt helt tal n så

$$(a_n - a_{n-1}) \cdot (b_n - b_{n-1}) < 0.$$

Opgave 3 Lad Ω være den omskrevne cirkel til den spidsvinklede trekant ABC hvor $|AB| > |BC|$, og lad O være centrum for Ω. Vinkelhalveringslinjen til $\angle ABC$ skærer Ω i punktet $M \neq B$. Lad Γ være cirklen med diameter BM. Vinkelhalveringslinjerne til $\angle AOB$ og $\angle BOC$ skærer Γ i henholdsvis punktet P og punktet Q. Punktet R er det punkt på linjen PQ som opfylder at $|BR| = |MR|$. Vis at $BR \parallel AC$. (I denne opgave betragtes en vinkelhalveringslinje som en halvlinje).