The Viking Battle - Del 1 2014
Version: Norwegian

Oppgave 1 La $\mathbb{N}$ betegne mengden av positive heltall. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ slik at

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

for alle positive heltall m og n.

Oppgave 2 La ω være omsirkelen til trekanten ABC. La videre M og N være midtpunktene på sidene AB og AC, henholdsvis, og T midtpunktet på buen BC av ω som ikke inneholder A. Omsirklene til trekantene AMT og ANT skjærer midtnormalene til henholdsvis AC og AB i henholdsvis X og Y. Anta at X og Y er indre punkter i trekanten ABC. Linjene MN og XY skjærer hverandre i K. Vis at $KA = KT$.

Oppgave 3 En gal fysiker har oppdaget en ny partikkel som han kaller *imon* etter at noen av dem plutselig dukket opp i laboratoriet hans. Noen par av imoner er *sammenfiltrert*, og hver imon kan være med i flere sammenfiltreringer samtidig. Fysikeren har funnet ut at han kan utføre følgende type endringer på disse partiklene, én endring om gangen.

(i) Hvis en imon er sammenfiltrert med et odde antall andre imoner i laboratoriet, kan fysikeren få den til å forsvinne.

(ii) På ethvert tidspunkt kan fysikeren doble hele samlingen av imoner i laboratoriet sitt ved å skape én kopi I' for hver imon I. Under denne doblingen blir to slike kopier I' og J' sammenfiltrert hvis og bare hvis I og J selv er sammenfiltrert, og hver kopi I' blir sammenfiltrert med den opprinnelige imonen I; ingen andre sammenfiltreringer oppstår eller forsvinner under en slik dobling.

Vis at fysikeren ved å utføre slike endringer kan ende opp med en samling imoner der ingen av dem er sammenfiltrert.