

The Viking Battle - Del 1 2013

Uppgift 1 Flera positiva heltal är skrivna på rad. Alice utför följande operation: Hon väljer två grannantal x och y sådana att x står till vänster om y , samt $x > y$, och ersätter paret (x, y) med $(y + 1, x)$ eller med $(x - 1, x)$. Visa att hon endast kan utföra denna operation ett ändligt antal gånger.

Uppgift 2 Låt $ABCD$ vara en inskriven fyrhörning vars diagonaler AC och BD skär varandra i punkten E . Förlängningarna av sidorna AD och BC skär varandra i F , där F ligger närmare A än D , och F ligger närmare B än C . Låt G vara punkten sådan att fyrhörningen $ECGD$ är en parallelogram, och låt punkten H vara spegelbilden av E i linjen AD . Visa att punkterna D , H , F och G ligger på en cirkel.

Uppgift 3 Finn alla tripplar (x, y, z) positiva heltal sådana att $x \leq y \leq z$, och

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2).$$