

The Viking Battle - Osa 1 2013

Tehtävä 1 Riviin on kirjoitettu jokin määrä positiivisia kokonaislukuja. Alice valitsee toistuvasti kaksi vierekkäistä lukua x ja y , joille $x > y$ ja x on y :n vasemmalla puolella, ja korvaa parin (x, y) joko parilla $(y + 1, x)$ tai parilla $(x - 1, x)$. Todista, että hän voi tehdä tämän vain äärellisen monta kertaa.

Tehtävä 2 Olkoon $ABCD$ jännelikulmio, jonka lävistäjät AC ja BD leikkaavat pisteessä E . Sivujen AD ja BC jatkeet leikkaavat pisteessä F niin, että piste A on pisteiden D ja F välissä ja piste B pisteiden C ja F välissä. Olkoon G sellainen piste, jolle $ECGD$ on suunnikas, ja olkoon H E :n peilikuva suoran AD suhteen. Osoita, että pisteet D, H, F ja G ovat samalla ympyrällä.

Tehtävä 3 Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen kolmikot (x, y, z) , joille $x \leq y \leq z$ ja

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2).$$