

## Uligheder – et resume

Oktober 2008

### Uligheder med gennemsnit

- Det aritmetiske gennemsnit af  $n$  reelle tal  $x_1, x_2, \dots, x_n$  er

$$\mathcal{A} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

- Det geometriske gennemsnit af  $n$  ikke-negative reelle tal  $x_1, x_2, \dots, x_n$  er

$$\mathcal{G} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

- Det harmoniske gennemsnit af  $n$  positive reelle tal  $x_1, x_2, \dots, x_n$  er

$$\mathcal{H} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

- Det kvadratiske gennemsnit af  $n$  reelle tal  $x_1, x_2, \dots, x_n$  er

$$\mathcal{Q} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

### Sætning

For  $n$  positive reelle tal  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gælder at

$$\mathcal{Q} \geq \mathcal{A} \geq \mathcal{G} \geq \mathcal{H},$$

med lighedstegn netop når  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

### Trekantsuligheden

For to  $n$ -tupler af reelle tal:  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  og  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  gælder at

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Bemærk at hvis tuplerne opfattes som vektorer  $a$  og  $b$ , siger trekantsuligheden at

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

### Cauchy-Schwarz' ulighed

For to  $n$ -tupler af reelle tal:  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  og  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  gælder at

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i y_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Bemærk at hvis tuplerne opfattes som vektorer  $a$  og  $b$ , siger Cauchy-Schwarz' ulighed at

$$a \cdot b \leq \|a\| \|b\|.$$

### Jensens ulighed

Lad  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  være en konveks funktion og  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  være reelle tal. Da gælder

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right).$$

Hvis  $f$  er konkav er  $-f$  konveks, så her gælder den omvendte ulighed. Hvis  $f$  er strengt konveks gælder lighedstegn kun når  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

### Omarrangerings-uligheden

Lad  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  og  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$  være reelle tal. Hvis  $\pi$  er en permutation (omarrangering) af tallene  $1, 2, \dots, n$  gælder

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} + \dots + a_n b_{\pi(n)} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Henrik Nørregaard