TALTEORI
Primfaktoropløsning og divisorer.

Disse noter forudsætter et grundlæggende kendskab til talteori som man kan få i Marianne Terps og Peter Trosborgs noter om talteori.
Noterne vil primært introducere forskellige opgaveteknikker hvor man skal se på primfaktoropløsning og divisorer.

1 Primfaktoropløsning

Ifølge aritmetikkens fundamentalsætning kan ethvert naturligt tal større end 1 primfaktoropløses på entydig måde, og dette er grundlaget for hele talteorien.

1.1 Sætning

Et naturligt tal n større end 1 med primfaktoropløsning

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

har $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_m)$ forskellige divisorer.

BEVIS. Enhver divisor i n er på formen

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m},$$

hvor $\beta_i \in \{0, 1, \dots, \alpha_i\}$. Dermed har n i alt $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_m)$ forskellige divisorer.

1.2 Eksempel

Denne sætning medfører eksempelvis at samtlige tal med netop p divisorer hvor p er et primtal, netop er alle (p-1)'te potenser af primtal.

1.3 Opgave

Et naturligt tal n, som højst er 500, har den egenskab at når man vælger et tal m tilfældigt blandt tallene $1, 2, 3, \dots, 499, 500$, så er sandsynligheden $\frac{1}{100}$ for at m går op i n.
Bestem den størst mulige værdi af n. (Georg Mohr-Konkurrencen 2006)

1.4 Opgave

Lad n være produktet af samtlige tal mindre end en million med præcis 9 divisorer.
Vis at n er et kvadrattal.

2 Divisorer

I mange typer opgaver kan det betale sig at se på hvilke mulige divisorer et udtryk kan have eller finde største fælles divisor for to udtryk.

2.1 Eksempel

I dette eksempel vil vi vise at hvis a, b, c og d er naturlige tal således at $ab = cd$, da er $a^n+b^n+c^n+d^n$ et sammensat tal for alle naturlige tal n. Når vi skal vise at $a^n+b^n+c^n+d^n$ er sammensat, skal vi gerne kunne faktorisere udtrykket, og derfor ønsker vi at se på hvilke fælles faktorer a, b, c og d har. Da $ab = cd$, kan vi se at en primdivsor i a også er divisor i c eller d. Dette udnytter vi til at indse at der findes naturlige tal r, s, u og v så $a = ru$, $b = sv$, $c = rs$ og $d = uv$. Nu har vi klarlagt sammenhængen mellem de fire tal og kan derfor faktorisere:

$$a^n + b^n + c^n + d^n = r^n u^n + s^n v^n + r^n s^n + u^n v^n = (r^n + v^n)(s^n + u^n).$$

Da begge faktorer er større end 1 for alle naturlige tal n, er $a^n + b^n + c^n + d^n$ et sammensat tal.

2.2 Opgave

Om tre naturlige tal a, b og c gælder at a er ulige, og at a, b og c ikke har en fælles divisor større end 1. Desuden er

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Bevis at abc er et kvadrattal.

2.3 Største fælles divisor

Den største fælles divisor og regnereglerne for den kan fx benyttes til at vise at brøken $\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ er uforkortelig for alle naturlige tal n, da dette er ensbetydende med at største fælles divisor mellem tæller og nævner er 1. Der gælder som bekendt følgende regneregel for den største fælles divisor

$$gcd(a, b) = gcd(a, b - ma), m \in \mathbb{Z}.$$

Dermed er

$$gcd(n^2+n-1, n^2+2n) = gcd(n^2+n-1, n^2+2n-(n^2+n-1)) = gcd(n^2+n-1, n+1) =$$

$$gcd(n^2 + n - 1 - n(n + 1), n + 1) = gcd(-1, n + 1) = 1.$$

2.4 Opgave

Vis at brøken

$$\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$$

er uforkortelig for alle hele tal n.

2.5 Opgave

Lad $a_n = n^2 + 500$ og $g(n) = gcd(a_n, a_{n+1})$. Vis at g er en begrænset funktion, og bestem den største værdi af g.

2.6 Eksempel

Nu skal vi se et eksempel på hvordan man også i forbindelse med at bestemme største fælles divisor kan benytte moduloregning.
Lad a, m og n være naturlige tal, hvor m er ulige, og $x > 1$.
Vi vil nu bestemme $gcd(a^m - 1, a^n + 1)$.
Sæt $gcd(a^m - 1, a^n + 1) = d$. I stedet for at forsøge at reducere dette udtryk regner vi a^{nm} modulo d på to forskellige måder da det kan give os informationer om d.

$$a^{nm} = (a^m)^n \equiv 1^n \equiv 1 \text{ mod } d.$$

Desuden er

$$a^{nm} = (a^n)^m \equiv (-1)^m \equiv -1 \text{ mod } d.$$

Dermed er $d = 2$ når a er ulige, og $d = 1$ når a er lige.

2.7 Opgave

Bestem samtlige naturlige tal $n, m > 2$ for hvilke $2^n - 1$ går op i $2^m + 1$.

3 Potenser af heltal som divisorer

Når divisorerne er potenser af heltal, kan man udnytte dette.

3.1 Eksempel

I dette eksempel skal vi se på hvordan man udnytter at en potens af et helt tal er divisor i et produkt. Hvis vi ser på ligningen

$$x(x + 1) = y^n,$$

kan vi se at hvis der findes en heltallig løsning, da må både x og $x + 1$ være n'te potenser af et helt tal da to på hinanden følgende hele tal ikke har nogen fælles divisorer. Men da må $1 = x + 1 - x = b^n - a^n$ hvilket ikke kan lade sig gøre når $n > 1$.
Vi udnytter altså her at to på hinanden følgende tal ikke har nogen fælles divisorer, til at indse at ligningen ikke har nogen heltallige løsninger. I det hele taget kan man udnytte at fælles divisorer for n og $n + a$ også er divisorer i a.

3.2 Opgave

Vis at ligningen

$$x^3 + 3 = 4y(y + 1)$$

ikke har nogen heltallige løsninger.

3.3 Opgave

For hvilke naturlige tal m og n, hvor m er ulige, er $m^n + 1$ et kvadrattal?

3.4 Opgave

Vis at der ikke findes naturlige tal x, y og n, $n > 1$, for hvilke

$$x(x+1)(x+2) = y^n.$$

Bemærkning
Generelt gælder at k på hinanden følgende tal, $k > 1$, aldrig er en n'te potens af et helt tal, når $n > 1$.

3.5 Opgave

Bestem alle naturlige tal n for hvilke $n2^{n-1} + 1$ er et kvadrattal.

3.6 Opgave

Bestem alle par x og y af hele tal for hvilke

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(IMO 2006)