Kombinatorik og grafteori

Opgave 1
I en skolegård står 1991 elever i en rundkreds og leger følgende leg. Eleverne nummereres først $1, 2, 3, \ldots, 1991$ fortløbende hele vejen rundt i rundkredsen. Derefter siger eleverne efter tur startende med elev nummer et $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, \ldots$, og alle dem der siger 2 eller 3 går ud af rundkredsen. Legen fortsætter indtil der kun er en elev tilbage, og denne elev har vundet. Hvilket nummer har den vindende elev?

Opgave 2
Lad G være en graf med n hjørner, $n \geq 4$, og $\frac{n^2-3n+4}{2}$ kanter. Grafen G har den egenskab at der findes en kant således at hvis man fjerner denne, så får man en graf G' som ikke er sammenhængende. Bestem længden af den længste Hamiltonkreds i G.

Opgave 3
I et land er der 2001 byer, og hver by har en vej til mindst en af de andre byer. Hvis en delmængde M af byerne har den egenskab at enhver af de 2001 byer som ikke ligger i M, har en vej til en by fra M, da er $|M| \geq k > 1$. Vis at landet kan inddeles i $2001 - k$ republikker således at to byer i samme republik ikke er forbundet af en vej.

Opgave 4
En graf med $2n + 1$ hjørner har den egenskab at der for vilkårlige n hjørner findes endnu et hjørne som er forbundet til alle disse n hjørner med en kant. Vis at der findes et hjørne i grafen som er forbundet til alle de andre hjørner i grafen med en kant.

Opgave 5
Lad A, B og C være tre disjunkte delmængder af $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$, $n \geq 1$, med netop n elementer i hver. Vis at der findes $x \in A$, $y \in B$ og $z \in C$ således et det ene af disse elementer netop er summen af de to andre.

Opgave 6
Lad X være en mængde med n elementer, $n \geq 2$, og lad $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ være 101 delmængder af X med følgende egenskab: Foreningsmængden af vilkårlige 50 af disse 101 delmænger har mere end $\frac{50}{51}n$ elementer. Vis at der findes tre blandt disse 101 delmængder således at hvert par af disse tre delmængder har mindst et fælles element.

Opgave 7
Vis at

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-2k} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} = \binom{4n}{2n}$$

for alle positive hele tal n.

Opgave 8
Lad X være mængden af $n-$tupler $(n_1, n_2, n_2, \ldots, n_{1994})$ af ikke negative heltal for hvilke $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + 1994n_{1994} = 1994$. Udregn

$$T = \sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_{1994}) \in X} \frac{1}{n_1!n_2!n_3! \cdots n_{1994}!(n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \cdots + 1993n_{1994})!}.$$

(Husk at $0! = 1$).

Løsninger til kombinatorik og grafteori

Opgave 1
Hvis der havde været 3^n elever, ville elev nummer et have vundet da der efter første runde ville være 3^{n-1} elever tilbage, efter anden runde 3^{n-2} elever tilbage, osv. således at elev nummer et hele tide ville sige 1. Nu ser vi på tilfældet med 1991 elever. Hvis vi kan finde en elev der siger 1, netop når der er en potens af tre elever tilbage, så ved vi at denne elev vinder. Vi har at $3^6 = 729 < 1991 < 3^7 = 2187$, dvs. når vi har fjernet $1991 - 729 = 1262$ elever så er der 3^6 elever tilbage, og elev nummer $\frac{3}{2}1262 + 1 = 1894$ siger 1, da 1262 er et lige tal. Dermed vinder elev nummer 1894.

Opgave 2
Betragt først den ikke sammenhængende graf G', og vælg to hjørner A og B som ikke er forbundet af en sti i G'. Lad V_A være mængden af hjørner inklusiv A som er forbundet med en sti til A, og definer V_B tilsvarende. Lad n_A betegne antallet af hjørner i V_A, og n_B betegne antallet af hjørner i V_B. Vi ved at $n_A \geq 1$, $n_B \geq 1$ samt at der er $n - n_A - n_B \geq 0$ hjørner som ikke ligger i V_A eller V_B. Der er ifølge betingelserne for G netop $\frac{n^2-3n+2}{2}$ kanter i G'. Dermed er

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} \leq \frac{n_A(n_A - 1)}{2} + \frac{n_B(n_B - 1)}{2} + \frac{(n - n_A - n_B)(n - n_A - n_B - 1)}{2},$$

og dermed

$$0 \leq (n_A - 1)(1 - n_B) + (n - n_A - n_B)(1 - n_A - n_B).$$

Da begge led på højresiden er ikke-positive, må de begge være nul, og dermed er $n_A = n-1$ og $n_B = 1$ eller omvendt. Grafen G' består dermed af $n - 1$ hjørner som alle er indbydes forbundne af en kant samt et hjørne der ikke er forbundet med nogen hjørner, dvs. grafen G består af $n - 1$ hjørner der alle er indbyrdes forbundne af en kant, samt et hjørne der er forbundet med en kant til netop et af de andre hjørner. Det sidste hjørne kan derfor ikke indgå i en Hamilton kreds, mens der oplagt findes en Hamiltonkreds der indeholder de $n - 1$ andre hjørner. Den længste Hamiltonkreds har derfor længde $n - 1$.

Opgave 3
Lad S være en maksimal delmængde af byer med den egenskab at ingen byer fra S er forbundet af en vej. Da har mængden S den egenskab at enhver by som ikke ligger i S, er forbundet med en vej til en by fra S, for i modsat tilfælde ville S ikke være maksimal. Dermed er $|S| \geq k$. Lad X være mængden som består af alle byer der ikke ligger i S. Vi inddeler nu i to tilfælde:
Hvis $|S| > k$ kan vi inddele i republikker således: Alle byerne fra S danner en republik, og hver af de resterende byer danner en republik.
Hvis $|S| = k$ bliver vi nødt til at lave en mere kompliceret inddeling i republikker. Hvis der findes to byer fra X som ikke er forbundet af en vej, kan disse to byer slås sammen til en republik i inddelingen ovenfor, og vi har dermed $2001 - k$ republikker med den ønskede egenskab. Antag derfor at alle byer fra X er forbundet med hinanden. Hvis der fandtes en by $t \in X$ som var forbundet med mindst to byer fra S, da ville mængden af alle byer fra S som ikke var forbundet med t, samt byen t, udgøre en mængde N af byer således at enhver by der ikke lå i N, var forbundet til en by fra N, og $|N| < k$, hvilket er en modstrid. Dermed er hver by fra X forbundet med netop en by fra S. For hver by i S findes en by fra X som denne by ikke er forbundet med, for i modsat fald ville en by fra S være forbundet med alle byer fra X, og dermed ville de andre byer fra S slet ikke

have nogen veje. Vi kan nu lave republikker på følgende måde: Hvert element fra X ligger i hver sin republik, og ethvert element fra S sættes i en republik med en by fra X med hvilken den ikke er forbundet. Dette giver $2001-k$ republikker med den ønskede egenskab.

Opgave 4

Vi viser først ved induktion efter k at der findes en fuldstændig $k-$graf for alle $k \leq n+1$. Det er oplagt at der findes en fuldstændig $2-$graf. Antag nu at der findes en fuldstændig $k-$graf, $k \leq n$. Da $k \leq n$ ved vi at der findes et hjørne uden for vores fuldstændige $k-$graf som er forbundet med samtlige k hjørner i denne graf, dvs. at dette hjørne sammen med de k hjørner i den fuldstændige $k-$graf danner en fuldstændig $k+1-$graf. Dermed ved vi at der findes en fuldstændig $n+1-$graf. Betragt nu de n hjørner som ikke ligger i denne fuldstændige $n+1-$graf. Der findes et hjørne fra den fuldstændige $n+1-$graf som er forbundet via en kant med samtlige af disse n hjørner, og dermed er dette hjørne forbundet med samtlige andre hjørner i grafen.

Opgave 5

Antag indirekte at der ikke findes tre elementer med den ønskede egenskab. Vi kan wlog antage at $1 \in A$. Dermed er det klart at der ikke findes to på hinanden følgende tal således at det ene ligger i B og det andet i C, for i givet fald ville de to elementer sammen med elementet 1 have den ønskede egenskab. Lad nu $B' = \{b_1, b_1+1, b_1+2 \dots, b_2\}$ være en størst mulig delmængde af B hvis elementer er nogle på hinanden følgende tal, og lad tilsvarende $C' = \{c_1, c_1+1, c_1+2 \dots, c_2\}$ være en størst mulig delmængde af C hvis elementer er nogle på hinanden følgende tal. Hvis $b_2 < c_1$ må tallene $c_1 - b_2, c_1 - b_2 + 1, c_1 - b_2 + 2, \dots, c_2 - b_1$ ikke tilhøre A da der ellers i givet fald findes tre elementer med den ønskede egenskab. Derfor ligger alle disse $(c_2 - b_1) - (c_1 - b_2) + 1 = c_2 - c_1 + b_2 - c_1 + 1 = |B'| + |C'| - 1$ på hinanden følgende tal enten i B eller i C. Da både B' og C' var maksimale, må $|B'| = 1$ eller $|C'| = 1$. Dette følger helt tilsvarende hvis $c_2 < b_1$. Vi kan nu wlog antage at $|B'| = 1$. Da vi desuden ved at $1 \in A$, og der ikke findes to på hinanden følgende tal hvor det ene tilhører B og det andet C, ved vi at hvis $b \in B$, da må $b - 1 \in A$, og da der er lige mange elementer i A og B kan vi yderligere slutte at hvis $a \in A$, da må $a + 1 \in B$. Lad nu $c \in C$, $c > 1$, således at $c - 1 \notin C$. (Et sådan element må findes). Men da kan $c - 1$ hverken tilhøre A eller B hvilket er en modstrid. Dermed findes $x \in A$, $y \in B$ og $z \in C$ således et det ene af disse elementer netop er summen af de to andre.

Opgave 6

Vi konstruerer en graf hvor de 101 delmængder $A_1, A_2, \dots, A_{101}$ udgør grafens 101 hjørner, og to hjørner er forbundet med en kant netop hvis de to delmængder har mindst et fælles element. Opgaven går nu ud på at vise at der findes en trekant i grafen. Hvis der findes mindst 51 hjørner hver med mindst 51 kanter, da findes oplagt en trekant i grafen. Antag derfor at der ikke findes mindst 51 hjørner med hver mindst 51 kanter. Da findes mindst 51 hjørner med maksimalt 50 kanter, dvs. mindst 51 delmængder som hver opfylder at der findes $101 - 50 - 1 = 50$ andre delmængder med hvilke de ikke har et fælles element. Antag wlog at disse 51 delmængder er $A_1, A_2, \dots, A_{51}$. Da foreningsmængden af 50 delmænger har mere end $\frac{50}{51}n$ elementer, må A_i, $i = 1, 2, \dots, 51$, indeholde færre end $\frac{1}{50}n$ elementer. Men dermed indeholder foreningsmængden af $A_1, A_2, \dots A_{50}$ færre end $\frac{50}{51}n$ elementer, hvilket er en modstrid.

Opgave 7
Betragt polynomiet
$$p(x) = (x+1)^{4n} = (x^2+2x+1)^{2n}.$$
Koefficienten til x^{2n} i $p(x) = (x+1)^{4n}$ er oplagt $\binom{4n}{2n}$. Koefficienten til x^{2n} i $p(x)$ kan også udregnes ved at betragte $(x^2+2x+1)^{2n}$. Da består den af en sum af led af formen 2^{2n-2k} hvor 2^{2n-2k} er fremkommet ved at vælge $2x$ fra $2n-2k$ parenteser, x^2 fra k parenteser og 1 fra k parenteser. For $k = 0, 1, 2, \dots n$ er der netop $\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}$ led af formen 2^{2n-2k} i koefficienten til x^{2n}. Dermed er koefficienten til x^{2n} i $p(x)$ netop $\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-2k}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}$, hvilket viser det ønskede.

Opgave 8
Lad A være mængden af alle $1994+1993$ tupler $(x_1, x_2, \dots, x_{1994+1993})$ der består af 1994 1-taller og 1993 nuller. Da er $|A| = \binom{1993+1994}{1993}$. For $(n_1, n_2, \dots, n_{1994}) \in X$ betegner $A_{(n_1,n_2,\dots,n_{1994})}$ delmængden af A som består af de $1994+1993$ tupler som indeholder præcis k 1-taller i træk præcis n_k gange for alle $k = 1, 2, \dots, 1994$. Dermed kan vi skrive A som en foreningsmængde af disjunkte mængder
$$A = \bigcup_{(n_1,n_2,\dots,n_{1994})\in X} A_{(n_1,n_2,\dots,n_{1994})}.$$
Dermed er
$$\binom{1994+1993}{1993} = |A| = \sum_{(n_1,n_2,\dots,n_{1994})\in X} |A_{(n_1,n_2,\dots,n_{1994})}|.$$
Antallet af elementer i $A_{(n_1,n_2,\dots,n_{1994})}$ er netop antal delmængden af A som består af de $1994+1993$ tupler som indeholder præcis k 1-taller i træk præcis n_k gange for alle $k = 1, 2, \dots, 1994$, dvs. hvis vi betragter de 1994 pladser mellem de 1993 nuller, dvs. vi tæller også pladsen før det første nul og efter det sidste, så skal vi placere k 1-taller på n_k pladser, for alle $k = 1, 2, \dots, 1994$, og det kan netop gøres på
$$\frac{1994!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_{1994}!(1994-n_1-n_2-n_3-\cdots-n_{1994})!} = \frac{1994!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_{1994}!(n_2+2n_3+3n_4+\cdots+1993n_{1994})!}$$
måder. Dermed er
$$\binom{1994+1993}{1993} = \sum_{(n_1,n_2,\dots,n_{1994})\in X} \frac{1994!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_{1994}!(n_2+2n_3+3n_4+\cdots+1993n_{1994})!},$$
dvs.
$$T = \frac{1}{1994!}\binom{1994+1993}{1993}.$$