

Polynomier

Disse noter giver en introduktion til polynomier, centrale sætninger om polynomiumsdivision, rødder og koefficienter samt opgaveløsningsstrategier. Desuden er der et afsnit om polynomier med heltallige koefficienter og deres særlige egenskaber mht. delelighed og irreducibilitet. Undervejs er der forholdsvis nemme opgaver, mens der til sidst er opgaver af stigende sværhedsgrad. Der er løsninger til samtlige opgaver bagerst i noterne.

I noterne betegner \mathbb{Z} sædvanligvis mængden af hele tal, \mathbb{Q} mængden af rationale tal, \mathbb{R} mængden af reelle tal og \mathbb{C} mængden af komplekse tal. Desuden betegner \mathbb{L} en af disse fire talmængder. De komplekse tal kan beskrives som mængden af alle tal på formen $a + ib$, hvor $i = \sqrt{-1}$ og a og b er reelle tal. Alle opgaver kan regnes uden brug af komplekse tal.

1 Polynomier

Definition af polynomium

Et polynomium

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

hvor $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{L}$ og $a_n \neq 0$ kaldes et n 'te grads polynomium med koefficienter i \mathbb{L} . Mængden af polynomier med koefficienter i \mathbb{L} betegnes $\mathbb{L}[x]$.

Nulpolynomiet er funktionen der er konstant nul, dvs. $P(x) = 0$, og dets grad sættes per definition til $-\infty$.

Tallet x_0 kaldes en rod i $P(x)$ hvis $P(x_0) = 0$.

Et polynomium kaldes normeret hvis koefficienten til højstegradsleddet er 1.

Et polynomium kaldes for *lige* hvis $P(x) = P(-x)$ for alle reelle tal x , og et polynomium kaldes tilsvarende for *ulige* hvis $P(x) = -P(-x)$ for alle reelle tal x .

Entydighedssætningen

Hvis to polynomier P og Q er identiske, dvs. at $P(x) = Q(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$,

da er deres koefficienter identiske. Opskrivningen af polynomier er altså entydig.

Bevis

Antag at $P(x) = Q(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Hvis koefficienterne i P og Q ikke er identiske, da er $0 = G(x) = P(x) - Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, hvor $n \geq 0$ og $a_n \neq 0$. For $n = 0$, er $0 = G(x) = a_0 \neq 0$ hvilket er umuligt. Antag derfor at $n > 0$, og sæt $A = \max\{\frac{a_i}{a_n} \mid i = 0, 1, \dots, n\}$. Da er

$$|a_n(2A)^n| > |a_n A^n (2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1)| \geq |a_{n-1}(2A)^{n-1} + \dots + a_1(2A) + a_0|,$$

og dermed $G(2A) \neq 0$ hvilket er en modstrid. \square

Opgave 1.1. Vis at de lige polynomier netop er de polynomier hvor koefficienterne hørende til led af ulige potenser af x er nul.

Vis tilsvarende at de ulige polynomier netop er de polynomier hvor koefficienterne hørende til led af lige potenser af x er nul.

Opgave 1.2. Vis at et polynomium af ulige grad med reelle koefficienter altid har mindst en reel rod.

2 Polynomiumsdivision

Sætning om polynomiumsdivision

Lad $P(x)$ og $Q(x)$ være polynomier i $\mathbb{L}[x]$ af grad henholdsvis n og m med $n, m \geq 0$. Hvis $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$ antages yderligere at koefficienten til m 'tegradsleddet i $Q(x)$ er ± 1 . Da findes entydigt bestemte polynomier D af grad $n - m$ og R af grad mindre end m med koefficienter i \mathbb{L} så

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x).$$

Polynomiet $R(x)$ kaldes resten af $P(x)$ ved division med $Q(x)$.

Bevis

Lad $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ og $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$ hvor $a_n, b_m \neq 0$. Først viser vi eksistensen ved induktion efter n . For $n < m$ er eksistensen oplagt med $D(x) = 0$ og $R(x) = P(x)$. Lad $n = N \geq m$, og antag at sætningen er sand for alle $n < N$. Da er

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} Q(x)$$

et polynomium af grad mindre end n , og dermed findes ifølge induktionsantagelsen polynomier D_1 og R så

$$P_1(x) = Q(x)D_1(x) + R(x)$$

hvor graden af R er mindre end m . Nu er

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) \text{ hvor } D(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + D_1(x),$$

dvs. nu har vi vist eksistensen. Bemærk at koefficienterne i D og R stadig er elementer i \mathbb{L} da $\frac{a_n}{b_m} \in \mathbb{L}$ når $a_n, b_m \in \mathbb{L}$, og vi har forudsat at $b_m = \pm 1$ hvis $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$.

For at vise entydigheden antager vi at der findes polynomier D_1, D_2, R_1 og R_2 i $\mathbb{L}[x]$ hvor R_1 og R_2 har grad mindre end m således at

$$P(x) = Q(x)D_1(x) + R_1(x) = Q(x)D_2(x) + R_2(x).$$

Da er

$$Q(x)(D_1(x) - D_2(x)) + R_1(x) - R_2(x)$$

nulpolynomiet. Da Q har grad m og $R_1 - R_2$ har grad mindre end m giver entydighedssætningen at $D_1 - D_2$ er nulpolynomiet og altså $D_1 = D_2$. Dermed er $R_1 - R_2$ også nulpolynomiet og $R_1 = R_2$, dvs. D og R er entydigt bestemt. \square

Denne sætning svarer til sætningen om hele tal der siger at hvis n og m er hele tal, $m \neq 0$, da findes to entydigt bestemte hele tal d og r , $0 \leq r < m$, således at $n = dm + r$. Her er r resten ved division af n med m . At et polynomium går op i et andet polynomium vil ligesom for hele tal sige at resten ved division er 0 hvilket følgende definition siger.

Definition af delelighed, reducibilitet og irreducibilitet

Et polynomium Q siges at gå op i P i $\mathbb{L}[x]$, $P, Q \in \mathbb{L}[x]$, hvis der findes et polynomium $D \in \mathbb{L}[x]$ så $P(x) = Q(x)D(x)$.

Et polynomium P kaldes reducibelt i $\mathbb{L}[x]$ hvis der findes to polynomier $S, T \in \mathbb{L}[x]$ af grad mindst en så $P(x) = S(x)T(x)$, og irreducibelt hvis der ikke findes to sådanne polynomier.

Eksempel

Vi undersøger for hvilke n det gælder at $x^2 + 1$ går op i

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1.$$

Sæt $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$. Da $P_3(x) = (x^2 + 1)(x + 1)$ må $x^2 + 1$ gå op i

$$x^m + x^{m-1} + \dots + x + 1.$$

Dermed vil $x^2 + 1$ gå op i $P_{4t+s}(x)$ netop når $x^2 + 1$ går op i $P_s(x)$. Da $x^2 + 1$ ikke går op i $P_2(x), P_1(x)$ og $P_0(x)$, går $x^2 + 1$ op i $P_n(x)$ netop hvis n har rest 3 ved division med 4.

Eksempel på polynomiumsdivision

Man dividerer $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 15$ med $Q(x) = x - 3$ på følgende måde:

$$\begin{array}{r} \underline{x-3} \mid x^3 - 2x^2 + 2x - 15 \quad |x^2+x+5 \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline x^2 + 2x - 15 \\ x^2 - 3x \\ \hline 5x - 15 \\ 5x - 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dvs. at $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x^2 + x + 5)$.

Eksempel på polynomiumsdivision med rest

Man dividerer $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 7$ med $Q(x) = x^2 + 1$ på følgende måde:

$$\begin{array}{r} \underline{x^2+1} \mid x^3 + 3x^2 - 2x + 7 \quad |x+3 \\ x^3 + 0x^2 + x \\ \hline 3x^2 - 3x + 7 \\ 3x^2 + 0x + 3 \\ \hline - 3x + 4 \end{array}$$

Dvs. at $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 7 = (x^2 + 1)(x + 3) - 3x + 4$.

Rester

Hvis vi skal finde resten af $P(x) = x^{2011} + 16x^{2007} + 1$ ved division med $Q(x) = x^2 - 4$ uden at udføre selve divisionen udnytter vi sætningen om

division med rest, dvs. vi ved at der findes et polynomium D med heltallige koefficienter og hele tal a og b så

$$x^{2011} + 16x^{2007} + 1 = (x^2 - 4)D(x) + ax + b.$$

For $x = 2$ er $2a + b = 2^{2011} + 16 \cdot 2^{2007} + 1 = 2^{2012} + 1$, og for $x = -2$ er $-2a + b = (-2)^{2011} + 16(-2)^{2007} + 1 = -2^{2012} + 1$. Dermed er resten $ax + b = 2^{2011}x + 1$.

Opgave 2.1. Udfør disse tre divisioner

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 3x - 2}{x - 1}$$

$$\frac{3x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 9x + 4}{x^2 + x + 1}$$

$$\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x - 1}$$

Opgave 2.2. Vis at $P(x) = x^{4n} + x^{2n} + 1$ er reducibelt i $\mathbb{Z}[x]$.

Opgave 2.3. Bestem resten ved division af $x^{100} - 2x^{51} + 1$ med $x^2 - 1$.

Opgave 2.4. Bestem a og b så $(x - 1)^2$ går op i $ax^4 + bx^3 + 1$.

Opgave 2.5. Undersøg om $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ er reducibelt i $\mathbb{Z}[x]$.

3 Algebraens fundamentalsætning og rødder

Sætning om rødder og faktorisering

Lad $P(x)$ være et n 'te grads polynomium med koefficienter i \mathbb{L} .

Hvis $x_0 \in \mathbb{L}$ er rod i $P(x)$, da findes et entydigt bestemt polynomium $D(x)$ af grad $n - 1$ med koefficienter i \mathbb{L} så

$$P(x) = (x - x_0)D(x).$$

Specielt gælder at hvis $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{L}$ er rødder i $P(x)$, da findes et entydigt bestemt polynomium $D(x)$ af grad $n - m$ med koefficienter i \mathbb{L} så

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)D(x).$$

Bevis. Antag at x_0 er rod i P og $x_0 \in \mathbb{L}$. Da findes entydigt bestemte polynomier D og R i $\mathbb{L}[x]$, hvor R har grad højst nul, således at $P(x) = (x - x_0)D(x) + R(x)$. Dermed er $R(x_0) = 0$, og da R har grad højst nul, må det være nulpolynomiet. Altså findes et polynomium D i $\mathbb{L}[x]$ så $P(x) = (x - x_0)D(x)$. Hvis vi antager at $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{L}$ er rødder i $P(x)$, fås ved at gentage argumentationen ovenfor at der findes et polynomium D i $\mathbb{L}[x]$ så $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)D(x)$. \square

Eksempel

Da a er rod i $P(x) = x^n - a^n$, går $x - a$ op i P . Ved division ses at

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Da $-a$ er rod i $Q(x) = x^n + a^n$ for ulige n , går $x + a$ op i Q . Ved division ses at

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Korollar om antallet af rødder

Et n 'te grads polynomium har højst n reelle rødder.

Korollar om entydighed

Hvis P og Q er to polynomier af grad højst n , og $P(x) = Q(x)$ for $n + 1$ forskellige værdier af x , da er $P = Q$.

Bevis. Antag at P og Q er to polynomier af grad højst n , og $P(x) = Q(x)$ for $n + 1$ forskellige værdier af x . Da er $P(x) - Q(x)$ et polynomium af grad højst n med $n + 1$ rødder, og dermed er $P(x) - Q(x)$ nulpolynomiet. \square

Algebraens fundamentalsætning

Lad $P(x)$ være et n 'te grads polynomium med koefficienter i \mathbb{C} . Da har polynomiet n ikke nødvendigvis forskellige rødder $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ således at

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Vi beviser ikke algebraens fundamentalsætning da det kræver et rimeligt kendskab til komplekse tal.

Bemærkning

Lad $P(x)$ være et polynomium med koefficienter i \mathbb{R} og grad mindst 1. Da

kan P faktoriseres i første- og andengradspolynomier med koefficienter i \mathbb{R} . Dette skyldes at de komplekse rødder kommer i par $a + ib$ og $a - ib$, og at $(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$. Da beviset for dette kræver kendskab til komplekse tal, springes det over.

Eksempel

Når man skal undersøge hvor mange reelle rødder et polynomium har, behøver man ikke nødvendigvis finde de reelle rødder. Man kan i stedet udnytte polynomiers kontinuitet. Fx har fjerdegradspolynomiet $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ fire reelle rødder da $P(-2) = 19$, $P(-1) = -1$, $P(0) = 1$, $P(2) = -1$ og $P(3) = 19$, dvs. der er en reel rod i hvert af følgende intervaller $]-2; -1[$, $]-1; 0[$, $]0; 2[$ og $]2; 3[$.

Eksempel

For at undersøge for hvilke n polynomiet $P(x) = x^n - x^{n-2} - 1$, $n > 3$, er deleligt med $Q(x) = x^3 - x + 1$, bemærker vi at Q går op i P netop når Q går op i $P(x) - Q(x) = x^n - x^{n-2} - x^3 + x$. De reelle rødder i polynomiet $P(x) - Q(x) = x^n - x^{n-2} - x^3 + x = x(x^2 - 1)(x^{n-3} - 1)$ er $x = 0$ og $x = \pm 1$. Polynomiet Q har en reel rod da det er et tredjegradspolynomien, og denne reelle rod er ikke $x = 0$ eller $x = \pm 1$. Polynomiet Q går derfor ikke op i $P - Q$ og dermed heller ikke i P for noget n .

Definition af multiplicitet

Tallet x_0 siges at være m -dobbelt rod eller rod af multiplicitet m i et polynomium $P(x)$ hvis $(x - x_0)^m$ går op i $P(x)$. Hvis man tæller antallet af rødder i et polynomium med multiplicitet, betyder det at den m -dobbelte rod x_0 tæller m gange.

Sætning om røddernes multiplicitet

For et polynomium $P(x)$ gælder at x_0 er m -dobbelt rod i P netop hvis

$$P(x_0) = P'(x_0) = P^{(2)}(x_0) = \dots = P^{(m-1)}(x_0) = 0.$$

Bevis

Antag at x_0 er m -dobbelt rod i P , altså at $P(x) = (x - x_0)^m Q(x)$. Da er

$$P'(x) = (x - x_0)^{m-1} (m \cdot Q(x) + (x - x_0)Q'(x)),$$

og x_0 er dermed $(m - 1)$ -dobbelt rod i $P'(x)$. Tilsvarende ses at x_0 er $(m - 2)$ -dobbelt rod i $P^{(2)}$ osv., dvs. at

$$P(x_0) = P'(x_0) = P^{(2)}(x_0) = \dots = P^{(m-1)}(x_0) = 0.$$

Antag omvendt at $P(x_0) = P'(x_0) = P^{(2)}(x_0) = \dots = P^{(m-1)}(x_0) = 0$. Vi viser at hvis x_0 er n -dobbelt rod i et polynomium Q' , da er x_0 $(n + 1)$ -dobbelt rod i den stamfunktion Q til Q' for hvilken $Q(x_0) = 0$, da dette giver det ønskede. Antag at x_0 er n -dobbelt rod i Q' , og at Q er den stamfunktion til Q' for hvilken $Q(x_0) = 0$. Antag at x_0 ikke er $(n + 1)$ -dobbelt rod i Q . Ifølge algebraens fundamentalsætning kan vi faktorisere

$$Q(x) = (x - x_0)^{n_0} (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k},$$

hvor $1 \leq n_0 \leq n$. Dermed er

$$Q'(x) = n_0 \frac{Q(x)}{x - x_0} + n_1 \frac{Q(x)}{x - x_1} + n_2 \frac{Q(x)}{x - x_2} + \dots + n_k \frac{Q(x)}{x - x_k}.$$

Da $n_1 \frac{Q(x)}{x - x_1} + n_2 \frac{Q(x)}{x - x_2} + \dots + n_k \frac{Q(x)}{x - x_k}$ er delelig med $(x - x_0)^{n_0}$ mens $n_0 \frac{Q(x)}{x - x_0}$ ikke er, er Q' ikke delelig med $(x - x_0)^{n_0}$. Da $n_0 \leq n$, er x_0 ikke n -dobbelt rod i Q' , hvilket er en modstrid. \square

Eksempel

Lad $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$. Vi vil vise at $(x - 1)^2$ går op i $P(x)$. Ved differentiation får man $P'(x) = (n+1)nx^n - (n+1)nx^{n-1}$, dvs. $P(1) = P'(1) = 0$. Dermed er $x = 1$ dobbeltrod i P , og $(x - 1)^2$ går op i $P(x)$.

Opgave 3.1. Vis at fjerdegradspolynomiet $P(x) = x(x - 2)(x - 4)(x - 6) + (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7)$ har fire reelle rødder.

Opgave 3.2. Undersøg for hvilke n polynomiet $P(x) = x^n + x^{n-1} - 1$, $n > 4$, er deleligt med $Q(x) = x^4 + x^3 - 1$.

Opgave 3.3. Bestem a og b så $x = -1$ er dobbelt rod i $P(x) = ax^n + nx^{n-2} + b$, n ulige.

4 Koefficienter

Andengradspolynomiets koefficienter

Hvis andengradspolynomiet $P(x) = x^2 + bx + c$ har rødderne x_1 og x_2 , da er

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2,$$

dvs. at $b = -(x_1 + x_2)$ og $c = x_1x_2$.

Tredjegradspolynomiets koefficienter

Hvis tredjegradspolynomiet $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ har rødderne x_1, x_2 og x_3 , da er

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3,$$

dvs. at $b = -(x_1 + x_2 + x_3)$, $c = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ og $d = -x_1x_2x_3$.

På samme måde kan man bestemme koefficienterne i polynomier af højere grad ud fra rødderne.

Eksempel

Hvis $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ har rødderne $-3, -1, 1, 3$, da er

$$a_2 = (-3)(-1) + (-3)1 + (-3)3 + (-1)1 + (-1)3 + 1 \cdot 3 = -10.$$

Eksempel

Vi ønsker at bestemme samtlige polynomier $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, hvor $a_i = \pm 1$, således at alle rødder i P er reelle. Antag at P har n reelle rødder x_1, x_2, \dots, x_n . Da er $x_1^2x_2^2 \dots x_n^2 = a_0^2 = 1$ og

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2 \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \leq 3.$$

I følge AG-uligheden er

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq n \sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2} = n,$$

altså er $n \leq 3$. Dermed er det let at finde samtlige ønskede polynomier, nemlig $x \pm 1, x^2 \pm x - 1$ og $x^3 - x \pm (x^2 - 1)$.

Opgave 4.1. For hele tal a og n har polynomiet $P(x) = x^3 - x^2 + ax - 2^n$ tre heltallige rødder. Bestem a og n .

Opgave 4.2. Lad x_1 og x_2 være rødderne i $P(x) = x^2 + ax + bc$ og x_2 og x_3 være rødderne i $Q(x) = x^2 + bx + ac$. Vis at hvis $ac \neq bc$, da er x_1 og x_3 rødderne i $R(x) = x^2 + cx + ab$.

Opgave 4.3. Lad $a_3, a_4, \dots, a_{2010}, a_{2011}$ være reelle tal med $a_{2011} \neq 0$. Vis at antallet af reelle rødder (regnet med multiplicitet) i polynomiet

$$P(x) = a_{2011}x^{2011} + a_{2010}x^{2010} + \dots + a_3x^3 + x^2 + x + 1$$

ikke overstiger 2009.

5 Polynomier med heltallige koefficienter

I dette afsnit er alle tal hele tal, og alle polynomier har heltallige koefficienter.

Sætning om delelighed

For et polynomium $P(x)$ gælder at $a - b$ går op i $P(a) - P(b)$, når $a \neq b$. Specielt er $P(a) \equiv P(b) \pmod{n}$ hvis $a \equiv b \pmod{n}$.

Bevis

Lad $P(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$ og $a \neq b$. Da

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

vil $a - b$ gå op i

$$P(a) - P(b) = a_m(a^m - b^m) + a_{m-1}(a^{m-1} - b^{m-1}) + \dots + a_1(a - b).$$

Eksempel

For et polynomium $P(x)$ er $P(n)$ lig et trecifret tal for alle $n = 1, 2, 3, \dots, 1998$. Vi vil vise at $P(x)$ ikke har nogle heltallige rødder. (BW 1998) For ethvert helt tal m findes et $n \in \{1, 2, \dots, 1998\}$ så $m \equiv n \pmod{1998}$, og dermed er $P(m) \equiv P(n) \not\equiv 0 \pmod{1998}$, da $P(n) \not\equiv 0 \pmod{1998}$ for alle $n = 1, 2, 3, \dots, 1998$. Dvs. at $P(x)$ ikke har nogen heltallige rødder.

Sætning om rødder

Hvis et rationalt tal skrevet som uforkortelig brøk $\frac{p}{q}$ er rod i polynomiet

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

med heltallige koefficienter, da vil $p \mid a_0$ og $q \mid a_n$.

Specielt vil de eneste rationale rødder i

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

være hele tal.

Opgave 5.1. Bevis sætningen.

Eksempel

For at bestemme samtlige rationale rødder i $P(x) = x^5 + 3x^3 + 2x + 6$ er det altså nok at tjekke de hele tal der går op i 6, dvs. at eneste rationale rod er $x = -1$.

Gauss' lemma

Hvis $P(x)$ er et polynomium med heltallige koefficienter som er irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$, da er det også irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$.

Bevis

Antag at $P(x) = Q(x)R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, hvor $Q(x), R(x) \in \mathbb{Q}[x]$ har grad mindst 1. Da alle koefficienter i Q er rationale, findes et mindste heltal q så

$$qQ(x) = q_k x^k + \dots + q_0 \in \mathbb{Z}[x],$$

og tilsvarende et mindste heltal r så

$$rR(x) = r_m x^m + \dots + r_0 \in \mathbb{Z}[x].$$

Sæt

$$qrP(x) = qQ(x)rR(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

På baggrund af faktoriseringen $qrP(x) = qQ(x)rR(x)$ vil vi finde en faktorisering af P i $\mathbb{Z}[x]$. Lad p være en primdivisor i q . Da er alle koefficienter i $qrP(x)$ delelige med p . Lad i være det mindste index så p går op i q_0, q_1, \dots, q_{i-1} , men ikke i q_i . Da

$$q_0 r_i + q_1 r_{i-1} + \dots + q_i r_0 = a_i \equiv 0 \pmod{p},$$

må p gå op i r_0 . Desuden er

$$q_0 r_{i+1} + q_1 r_i + \dots + q_i r_1 + q_{i+1} r_0 = a_{i+1} \equiv 0 \pmod{p},$$

dvs. r_1 også er delelig med p . Ved at fortsætte på denne måde ser vi at alle koefficienter i R er delelige med p , dvs. at $\frac{r}{p}R \in \mathbb{Z}[x]$. Dermed har vi fået en ny faktorisering $\frac{qr}{p}P(x) = qQ(x) \cdot \frac{r}{p}R(x)$. Ved at fortsætte på denne måde får vi en faktorisering af P med polynomier med heltallige koefficienter. \square

Eisensteins udvidede irreducibilitetskriterium

Lad $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ være et polynomium med heltallige koefficienter, hvor et primtal p går op i a_0, a_1, \dots, a_k , for et heltal $0 < k < n$, mens $p \nmid a_{k+1}$ og $p^2 \nmid a_0$. Da har $P(x)$ en irreducibel faktor af grad større end k i $\mathbb{Z}[x]$. Specielt er $P(x)$ irreducibel hvis $k = n - 1$, og i dette tilfælde kaldes kriteriet blot for Eisensteins irreducibilitetskriterium.

Bevis

Antag at $P(x) = Q(x)R(x)$, hvor $Q(x) = q_s x^s + \dots + q_0$ og $R(x) = r_m x^m + \dots + r_0$ er polynomier med heltallige koefficienter. Da $a_0 = q_0 r_0$ er delelig med p , men ikke med p^2 , er netop en af q_0 og r_0 delelig med p . Antag wlog at $p \mid q_0$ og $p \nmid r_0$. Da p går op i a_1 og $a_1 = r_0 q_1 + q_0 r_1$, må $p \mid q_1$. Ved at fortsætte på denne måde ses at p går op i q_0, q_1, \dots, q_k , men at $p \nmid q_{k+1}$. Det følger heraf at Q har grad mindst $k + 1$. \square

Eksempel

For at undersøge om polynomiet $P(x) = x^5 + 4$ er irreducibelt indenfor $\mathbb{Q}[x]$, kan man bruge Eisensteins irreducibilitetskriterium, men ikke direkte. Bemærk først at $P(x)$ er irreducibelt, netop hvis $P(x+1)$ er irreducibelt. Da $P(x+1) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 5$, er det irreducibelt ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium med primtallet $p = 5$, og dermed er $P(x)$ det også.

Opgave 5.2. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter således at der findes to hele tal a og b så $P(a) = 1$ og $P(b) = 3$. Kan ligningen $P(x) = 2$ have to forskellige heltallige løsninger? (BW 1994)

Opgave 5.3. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter således at der findes et helt tal n så $P(-n) < P(n) < n$. Vis at da er $P(-n) < -n$. (BW 1991)

Opgave 5.4. Vis at $P(x) = x^6 + 3x^4 + 6x^3 + 9x + 3$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$.

Opgave 5.5. Vis at $P(x) = x^p + p^2x^2 + px + p - 1$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ for alle ulige primtal p .

Opgave 5.6. Lad x_1, x_2, \dots, x_n være forskellige heltal. Vis at $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) - 1$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$.

6 Blandede opgaver

Opgave 6.1. Et tredjegradspolynomium $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ har rødderne a, b og c . Angiv et tredjegradspolynomium med rødderne $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ og $\frac{1}{c}$. (GM 1994)

Opgave 6.2. Det reelle tal a er rod i $P(x) = x^3 - x - 1$. Bestem et tredjegradspolynomium med heltallige koefficienter som har a^2 som rod.

Opgave 6.3. Bestem samtlige mulige værdier af $x + \frac{1}{x}$, hvor x tilfredsstiller ligningen

$$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0,$$

og løs denne ligning. (GM 2000)

Opgave 6.4. Lad P være et sjettegradspolynomium som for to reelle tal a og b , $0 < a < b$, opfylder at $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$ samt $P'(0) = 0$. Vis at $P(x) = P(-x)$ for alle reelle tal x . (BW 1998)

Opgave 6.5. I et tredjegradspolynomium $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ er $b < 0$ og $ab = 9c$. Vis at $P(x)$ har tre forskellige reelle rødder. (BW 1992)

Opgave 6.6. Bestem alle fjerdegradspolynomier $P(x)$ som opfylder følgende:

i) $P(x) = P(-x)$ for alle x .

ii) $P(x) \geq 0$ for alle x .

iii) $P(0) = 1$.

iv) $P(x)$ har præcis to lokale minima i x_1 og x_2 således at $|x_1 - x_2| = 2$.

(BW 1992)

Opgave 6.7. Vis at ikke alle rødder i $P(x) = x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + \dots + 2n^n$ er reelle.

Opgave 6.8. Et polynomium $P(x)$ har heltallige koefficienter og grad n . Desuden findes præcis k hele tal som er løsning til ligningen $(P(x))^2 = 1$. Vis at $k - n \leq 2$. (IMO 1974)

Opgave 6.9. Lad $P(x)$ være et n 'te grads polynomium med $P(k) = \frac{k}{k+1}$ for $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Bestem $P(n+1)$.

Opgave 6.10. Lad $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, hvor $n > 1$ er et helt tal. Vis at $P(x)$ ikke kan skrives som et produkt af to polynomier med heltallige koefficienter og grad mindst en. (IMO 1993)

Opgave 6.11. Bestem alle polynomier $P(x)$ med reelle koefficienter som opfylder at

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

for alle tripler (a, b, c) af reelle tal som for hvilke $ab + bc + ca = 0$. (IMO 2004)

I noterne står GM for Georg Mohr-Konkurrence, NMC for Den Nordiske Matematikkonkurrence, BW for Baltic Way og IMO for Den Internationale Matematik Olympiade.

7 Løsningsskitser

Opgave 1.1 Lad $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ være et lige polynomium, dvs. at $P(x) = P(-x)$. Dermed er

$$0 = P(x) - P(-x) = 2(a_{2m+1} x^{2m+1} + a_{2m-1} x^{2m-1} + \dots + a_1 x),$$

hvor m er det største hele tal så $n \geq 2m + 1$. Da det eneste polynomium, der er nul for alle x , ifølge entydighedssætningen er nulpolynomiet, består $P(x)$ kun af led af lige potens af x .

At et ulige polynomium kun indeholder led af ulige potens af x , vises på tilsvarende måde.

Opgave 1.2 Lad $P(x)$ være et polynomium af ulige grad. Da vil $P(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow \infty$ og $P(x) \rightarrow -\infty$ for $x \rightarrow -\infty$ eller omvendt. Da et polynomium er kontinuert og defineret for alle reelle tal, findes dermed mindst et reelt tal r , så $P(r) = 0$.

Opgave 2.1

$$x^4 - 2x^2 + 3x - 2 = (x-1)(x^3 + x^2 - x + 2)$$

$$3x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 9x + 4 = (x^2 + x + 1)(3x^2 + 5x + 4)$$

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = (x-1)(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x - 1)$$

Opgave 2.2 $P(x) = x^{4n} + x^{2n} + 1 = (x^{2n})^2 + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} = (x^{2n} + 1)^2 - (x^n)^2 = (x^{2n} + 1 + x^n)(x^{2n} + 1 - x^n)$. Altså er P reducibel i $\mathbb{Z}[x]$.

Opgave 2.3 Vi ved at $x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$. Ved at indsætte henholdsvis $x = 1$ og $x = -1$ får man $a + b = 0$ og $-a + b = 4$, dvs. resten er $-2x + 2$.

Opgave 2.4 Sæt $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$. Antag at $(x-1)^2$ går op P . Da er $x = 1$ rod i P og dermed $a + b + 1 = 0$ og altså $b = -a - 1$. Ved division ses at $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1 = (x-1)(ax^3 - x^2 - x - 1)$, og dermed at $x = 1$ også er rod i $ax^3 - x^2 - x - 1$. Dette giver samlet $a = 3$ og $b = -4$.

Opgave 2.5 Bemærk først at $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x) + 1 > 0$ for alle hele tal x , dvs. at $P(x)$ ikke har nogle heltallige rødder. Hvis der findes et polynomium med heltallige koefficienter som går op i $P(x)$, må det altså være et andengradspolynomium. Antag at $P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Det ses let at dette ikke er muligt.

Opgave 3.1 Polynomiet $P(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) + (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ har fire reelle rødder da $P(0) > 0$, $P(1) < 0$, $P(3) > 0$, $P(5) < 0$ og $P(7) > 0$, dvs. der er en reel rod i hvert af intervallerne $]0; 1[$, $]1; 3[$, $]3; 5[$ og $]5; 7[$.

Opgave 3.2 Polynomiet $Q(x) = x^4 + x^3 - 1$ går op i $P(x) = x^n + x^{n-1} - 1$ netop hvis $Q(x)$ går op i $P(x) - Q(x) = x^n + x^{n-1} - x^4 - x^3 = x^3(x-1)(x^{n-4} - 1)$. Polynomiet Q har en reel rod mellem 0 og 1 da $Q(0) = -1$ og $Q(1) = 1$, men denne rod er ikke rod i $P(x) - Q(x)$. Dermed går Q ikke op i P for noget n .

Opgave 3.3 Når $x = -1$ er dobbelt rod i $P(x) = ax^n + nx^{n-2} + b$, n ulige, er $0 = P(-1) = -a - n + b$ og $0 = P'(-1) = an + n(n-2)$, dvs. $a = 2 - n$ og $b = 2$.

Opgave 4.1 Kald de heltallige rødder for x_1, x_2 og x_3 . Da er $x_1x_2x_3 = 2^n$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$ og $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Af sidste ligning ses at en eller tre af rødderne skal være ulige, og da $x_1x_2x_3 = 2^n$ kan vi uden tab af generalitet antage at $x_1 = \pm 1$. Hvis $x_1 = 1$, skal $x_2 + x_3 = 0$ og $x_2x_3 = 2^n$ hvilket er umuligt. Altså er $x_1 = -1$ og $x_2x_3 = -2^n$, $x_2 + x_3 = 2$ og $-2 + x_2x_3 = a$. Heraf ses let at x_2 og x_3 er henholdsvis 4 og -2, dvs. $a = -10$ og $n = 3$.

Opgave 4.2 Oplysningerne giver at $a = -(x_1 + x_2)$, $bc = x_1x_2$, $b = -(x_2 + x_3)$ og $ac = x_2x_3$, og vi skal vise at $c = -(x_1 + x_3)$ og $ab = x_1x_3$. Af ligningerne ses at $a - b = x_3 - x_1$ og $c(a - b) = x_2(x_3 - x_1)$. Da $ac \neq bc$, får vi at $c = x_2$, $a = x_3$ og $b = x_1$. Sluttelig fås let at $c = -(x_1 + x_3)$.

Opgave 4.3 At P højst har 2009 reelle rødder (regnet med multiplicitet), svarer til at vise at P ikke har 2011 reelle rødder (regnet med multiplicitet), for hvis det har 2010 reelle rødder, må det også have 2011 reelle rødder (overvej). Antag derfor at P har 2011 reelle rødder $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$, og bemærk at ingen af disse er nul. Da er

$$a_{2011}x^{2011} + a_{2010}x^{2010} + \dots + a_3x^3 + x^2 + x + 1 = a_{2011}(x - x_1) \cdots (x - x_{2011}).$$

Ved at se på henholdsvis koefficienten til nultegradsleddet, førstegradsleddet og andengradsleddet får man

$$1 = -a_{2011}x_1x_2 \cdots x_{2011}, \quad 1 = a_{2011}x_1x_2 \cdots x_{2011} \sum_{i=1}^{2011} \frac{1}{x_i},$$

$$1 = -a_{2011}x_1x_2 \cdots x_{2011} \sum_{1 \leq i < j \leq 2011} \frac{1}{x_i x_j}.$$

Kombination af dette giver

$$\sum_{i=1}^{2011} \frac{1}{x_i} = -1 \quad \text{og} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 2011} \frac{1}{x_i x_j} = 1.$$

Nu er

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{2011} \frac{1}{x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{2011} \frac{1}{x_i^2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2011} \frac{1}{x_i x_j} > 2,$$

hvilket er en modstrid. Dermed har P højst 2009 reelle rødder (regnet med multiplicitet).

Opgave 5.1 Antag at $\frac{p}{q}$ er rod i P , og at $\frac{p}{q}$ er uforkortelig. Da er

$$q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_0 q^n = 0,$$

og derfor må q gå op i $a_n p^n$ og dermed i a_n , og desuden må p gå op i $a_0 q^n$ og dermed i a_0 .

Opgave 5.2 Da $a \neq b$ vil $b - a \mid P(b) - P(a) = 3 - 1 = 2$. Antag at $P(c) = 2$. Da vil $c - a \mid P(c) - P(a) = 1$ og $b - c \mid P(b) - P(c) = 1$. Vi ved altså at $c = a \pm 1$, $c = b \pm 1$ samt at $a = b \pm 2$ eller $a = b \pm 1$. Der findes højst et tal c der opfylder dette.

Opgave 5.3 Vi ved at $2n = n - (-n) \mid P(n) - P(-n)$, dvs. at $P(n) - P(-n) \geq 2n$. Dermed er $P(n) - 2n \geq P(-n)$, og vi ved yderligere at $P(n) < n$. Samlet giver dette $P(-n) \leq P(n) - 2n < n - 2n = -n$.

Opgave 5.4 Polynomiet $P(x) = x^6 + 3x^4 + 6x^3 + 9x + 3$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium, hvor man benytter $p = 3$.

Opgave 5.5 Polynomiet $P(x) = x^p + p^2 x^2 + px + p - 1$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ for alle ulige primtal p , netop hvis

$$P(x+1) = (x^p + \binom{p}{p-1} x^{p-1} + \dots + \binom{p}{1} x + 1) + p^2(x^2 + 2x + 1) + (px + p) + p - 1$$

er irreducibelt. Da $\binom{p}{i}$ er delelig med p for alle $i = 1, 2, \dots, p-1$, når p er et primtal, er alle koefficienterne på nær højstegrads-koefficienten til $P(x+1)$ delelige med p . Desuden er konstantleddet $p^2 + 2p$ ikke delelig med p^2 , når p er et ulige primtal. Dermed er $P(x+1)$, og altså også $P(x)$, irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium.

Opgave 5.6 Antag at $P(x) = Q(x)R(x)$, hvor Q og R er polynomier med heltallige koefficienter. Da er $Q(x_i) = -R(x_i) = \pm 1$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$. Dermed er $Q(x) + R(x)$ et polynomium med n forskellige rødder x_1, x_2, \dots, x_n , dvs. enten har $Q(x) + R(x)$ grad mindst n , eller også er det nulpolynomiet. Antag at $Q(x) + R(x)$ er nulpolynomiet. Da er $P(x) = -Q(x)^2$ i modstrid med at koefficienten til højstegradsleddet i P er 1. Dermed har $Q(x) + R(x)$ grad mindst n , dvs. en af dem har grad mindst n . Da $P(x) = Q(x)R(x)$ er et polynomium af grad n , følger at enten Q eller R har grad n . Dermed er P irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$ og ifølge Gauss' lemma også i $\mathbb{Q}[x]$.

Opgave 6.1 Bemærk at $P(x) = x^3(1 + 2\frac{1}{x} - 3(\frac{1}{x})^2 - 5(\frac{1}{x})^3)$, dvs. $Q(x) = 1 + 2x - 3x^2 - 5x^3$ har rødderne $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ og $\frac{1}{c}$.

Opgave 6.2 Da a er rod i P , har vi at

$$0 = (a^3 - a - 1)^2 = a^6 + a^2 + 1 - 2a^4 - 2a^3 + 2a \text{ og } a^3 - a = 1.$$

Her af ses at $(a^2)^3 - 2(a^2)^2 + a^2 - 1 = 0$, dvs. at a^2 er rod i

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

Opgave 6.3 Da $x = 0$ ikke er løsning til ligningen, kan vi dividere begge sider med x^2 og omskrive til en andengradsligning i $x + \frac{1}{x}$.

$$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Dermed er $x + \frac{1}{x} = -6 \vee x + \frac{1}{x} = 1$. Af første ligning fås $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$, mens den sidste ikke har nogen løsninger.

Opgave 6.4 Polynomiet $Q(x) = P(x) - P(-x)$ har grad højst fem samt fem forskellige rødder $-b, -a, 0, a$ og b . Desuden er $Q'(0) = 0$, hvilket viser at 0 er dobbeltrod. Dermed må $Q(x)$ være nulpolynomiet, dvs. at $P(x) = P(-x)$ for alle x .

Opgave 6.5 For $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ vil diskriminanten være positiv da $b < 0$, dvs. $P'(x)$ har to forskellige reelle rødder x_1 og x_2 . Da $P(x)$ er et tredjegrads-polynomium, vil det have tre forskellige reelle rødder netop hvis $P(x_1)$ og $P(x_2)$ har forskellige fortegn, dvs. netop hvis $P(x_1)P(x_2) < 0$ (overvej). Ved at udnytte at $ab = 9c$, får man ved division af $P(x)$ med $P'(x)$ at resten er $x(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2)$. Da

$$P(x) = P'(x)\frac{1}{3}x + x\left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)$$

og $x_1x_2 = \frac{b}{3} < 0$, er

$$P(x_1)P(x_2) = x_1x_2\left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)^2 < 0.$$

Opgave 6.6 Lad $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Ifølge i) er $b = d = 0$, og ifølge iii) er $e = 1$. Yderligere giver ii) at $a > 0$, dvs. $P(x) = ax^4 + cx^2 + 1$, hvor $a > 0$.

Da $P(x)$ har to lokale minima, må $P'(x) = 4ax^3 + 2cx = 2x(2ax^2 + c)$ have tre forskellige reelle rødder, og da $a > 0$ giver dette at $c < 0$. Rødderne i $P'(x)$ er $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{-c/(2a)}$, dvs. at $2\sqrt{-c/(2a)} = 2$ og dermed $c = -2a$. Endelig giver ii) at $P(x) = ax^4 - 2ax^2 + 1 = a(x^2 - 1)^2 + 1 - a > 0$, dvs. at $0 < a \leq 1$. Det er nemt at tjekke at alle sådanne polynomier opfylder de fire betingelser.

Opgave 6.7 Antag at P har n reelle ikke nødvendigvis forskellige rødder x_1, x_2, \dots, x_n . Da er

$$\sum_{i=1}^n x_i = -2n \quad \text{og} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 2n^2.$$

Vha. QA-uligheden ses at

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 2n^2 - 2n,$$

hvilket er en modstrid.

Opgave 6.8 Bemærk først at $(P(x))^2 = 1 \Leftrightarrow (P(x)-1)(P(x)+1) = 0$. Antag at $P(a) = 1$ og $P(b) = -1$ for to hele tal a og b . Da vil $a-b \mid P(a)-P(b) = 2$, dvs. at $b = a \pm 1 \vee b = a \pm 2$.

Antag nu at m er den mindste heltallige løsning til $(P(x)-1)(P(x)+1) = 0$, og antag fx at $P(m) - 1 = 0$. Da findes højst to heltallige løsninger til $P(x) + 1 = 0$, nemlig $m+1$ og $m+2$. Polynomiet $P(x) - 1$ er af n 'te grad og har derfor højst n rødder. Dermed har $(P(x)-1)(P(x)+1) = 0$ højst $n+2$ heltallige løsninger.

Opgave 6.9 Da $P(k) - \frac{k}{k+1} = 0$ for $k = 0, 1, 2, \dots, n$, vil $n+1$ 'te grads polynomiet $Q(x) = P(x)(x+1) - x$ have rødderne $0, 1, 2, \dots, n$. Dermed er

$$Q(x) = a(x-0)(x-1)(x-2)\dots(x-n).$$

Da $Q(-1) = 1$, må $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, og dermed

$$P(n+1) = \frac{Q(n+1) + n + 1}{n + 2} = \frac{(-1)^{n+1} + n + 1}{n + 2} = \begin{cases} 1 & \text{for ulige } n \\ \frac{n}{n+2} & \text{for lige } n \end{cases}.$$

Opgave 6.10 Ifølge Eisensteins udvidede irreducibilitetskriterium med $p = 3$ og $k = n - 2$ har P en irreducibel faktor i $\mathbb{Z}[x]$ af grad mindst $n - 1$. Dvs. hvis P er reducibelt, må det have en rod. En rod i P er et helt tal som går op i 3, og det ses derfor nemt at P ikke har nogen heltallig rod. Dermed er P irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$.

Opgave 6.11 Lad $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$. For hvert x opfylder tripplen $(a, b, c) = (6x, 3x, -2x)$ betingelsen $ab + bc + ca = 0$. Dermed er $P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x)$. Hvis $a_i \neq 0$, er $3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i = 0$, men hvis i er ulige, er $3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i < 0$, dvs. $a_i = 0$. Hvis i er lige og $i \geq 6$ eller $i = 0$, er $3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i > 0$, dvs. $a_i = 0$. Dermed er de eneste koefficienter som ikke nødvendigvis er 0, koefficienterne a_4 og a_2 . De eneste mulige polynomier der kan opfylde betingelsen, er derfor polynomier på formen $P(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2$. Det er nemt at tjekke at alle sådanne polynomier faktisk opfylder betingelsen.