Projektiv plangeometri

Aktive link (blå) ved læsning på computer

1 Uendelig fjerne punkter og den uendelig fjerne linje

I den *projektive plangeometri* er alle linjer i det geometriske plan udvidet med et *uendelig fjernt punkt.* To linjer antages at have samme uendelig fjerne punkt hvis og kun hvis de er parallelle. De uendelig fjerne punkter danner tilsammen den *uendelig fjerne linje.* Det således udvidede geometriske plan kaldes det *projektive plan.* Udvidelsen forenkler nogle dele af plangeometrien fordi der så gælder:

Gennem to forskellige punkter går der netop én linje.

To forskellige linjer har netop ét fælles punkt.

1.1 Øvelse

Vis at dette gælder uanset om punkterne og linjerne er de sædvanlige i det geometriske plan, hvor linjerne så har fået tilføjet et uendelig fjernt punkt, eller uendelig fjerne.

De to sætninger ses at svare til hinanden når »punkt« byttes om med »linje« og »ligger på« med »går gennem«. Øvelse 5.3 senere viser at det i den projektive plangeometri alment gælder at hvis en sætning er opfyldt, så er den sætning man får ved at skifte ordene ud på denne måde, også opfyldt. Dette kaldes *dualitet.* Da ordene kun kan skiftes ud hvis den ændrede sætning giver mening, er der tale om sætninger hvor der ikke indgår afstande eller vinkler.

Punkter og linjer forstås i det følgende at høre til det projektive plan medmindre andet er nævnt. Symbolet AB betegner sædvanligvis *hele linjen* gennem de to forskellige punkter A og B, og ligningen $AB = CD$ angiver at linjerne er identiske. Lejlighedsvis betegner AB en *afstand* eventuelt regnet med fortegn langs en linje. Hvis ligningen $AB = CD$ betyder at de to afstande er lige store, er det nævnt i sammenhængen. Det bliver også nævnt i sammenhængen hvis AB betegner et *linjestykke.* Skæringspunktet mellem to linjer l og m betegnes med $l \cap m$.

2 Projektiv transformation

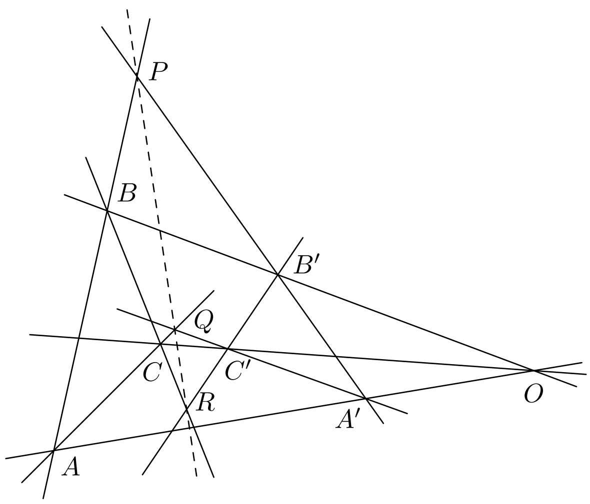
En afbildning som 1) fører det projektive plan over i *hele* det projektive plan og afbilder 2) forskellige punkter i *forskellige* punkter og 3) linjer i linjer, kaldes en *projektiv transformation* af det projektive plan. Egenskaberne 1) og 2) indebærer at afbildningen har en onvendt afbildning med de samme to egenskaber. Hvis A' og B' er punkter på en linje l' og billeder af punkter A og B ved en projektiv transformation, er l' billedet af $l = AB$. Altså er enhver linje billedet af en linje, og den omvendte afbildning er selv en projektiv transformation. Hvis l' er billedet af l, er l billedet af l' ved den omvendte afbildning, forskellige linjer afbildes i forskellige linjer, og punkter *uden for* l afbildes i punkter uden for l'. Det kan vises at *hvis ikke tre af punkterne* A, B, C, D *og ikke tre af punkterne* A', B', C', D'

ligger på en linje, findes der netop én projektiv transformation som fører A, B, C, D *over i* A', B', C', D'. Beviset er omstændeligt og gives ikke her.

Projektive transformationer kan være nyttige i beviser fordi man somme tider kan transformere en figur til et særtilfælde hvor beviset er nemmere end i det almene tilfælde.

2.1 Eksempel: Desargues' sætning

> *Om punkterne* A, B, C, A', B', C' *antages at hverken punkterne* A, B, C*, punkterne* A', B', C'*, tre af punkterne* A, B, A', B'*, tre af punkterne* A, C, A', C' *eller tre af punkterne* B, C, B', C' *ligger på en linje. Alle punkerne* A, B, C, A', B', C' *og alle linjerne* $AB, AC, BC, A'B', A'C', B'C'$ *er så forskellige, og hvis* AA'*,* BB'*,* CC' *har et fælles punkt, ligger* $AB \cap A'B'$*,* $AC \cap A'C'$*,* $BC \cap B'C'$ *på en linje.*



Bevis Med $A = B$ eller $AB = AC$ ville A, B, C ligge på en linje, og med $A = A'$, $B = A'$, $AB = A'B'$ eller $AB = A'C'$ ville A, B, A' ligge på en linje. Tilsvarende i de øvrige tilfælde. Da alle sætningens sammenhænge er uændrede ved en projektiv transformation, er det tilstrækkeligt at vise et tilfælde som kan nås fra alle andre med en sådan transformation. Denne transformation kan vælges så $P = AB \cap A'B'$ og $Q = AC \cap A'C'$ bliver uendelig fjerne. Punkterne A, B, C, A', B', C' ligger da i det geometriske plan. Der gælder nemlig $A \neq P$ fordi A, A', B' ellers lå på $A'B'$. Tilsvarende $A \neq Q$. Hvis A var uendelig fjernt ville den uendelig fjerne linje så også indeholde B og C i modstrid med at A, B, C ikke ligger på en linje. Tilsvarende B, C, A', B', C'. Dermed har vi $AB \parallel A'B'$ og $AC \parallel A'C'$, så trekanterne ABC og $A'B'C'$ er forbundet ved en multiplikation ud fra det fælles punkt O for AA', BB', CC' eller, hvis O er uendelig fjernt, en parallelforskydning, hvoraf følger $BC \parallel B'C'$. Punktet $R = BC \cap B'C'$ ligger da på den uendelig fjerne linje sammen med P og Q.

2.2 Øvelse

Udtryk og vis den omvendte til Desargues' sætning, og gør rede for at den er dual til Desargues' sætning.

2.3 Øvelse: Pappos' sætning

Vis *Pappos' sætning*:

> *Hvis punkterne* A, B, C *ligger på en linje og punkterne* A', B', C' *på en anden linje, og de alle er forskellige og forskellige fra de to linjers skæringspunkt, ligger* $AB' \cap A'B$*,* $AC' \cap A'C$*,* $BC' \cap B'C$ *på en linje.*

Gør rede for at sætningen er sin egen duale.

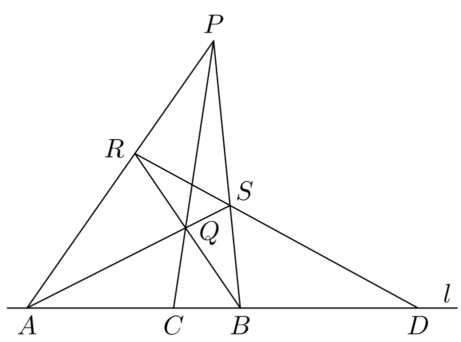
De *affine transformationer* er projektive transformationer som afbilder den uendelig fjerne linje i sig selv. Når dét er tilfældet, afbildes også resten af det projektive plan, altså det geometriske plan, i sig selv. Dermed kan affine transformationer betragtes som en transformationer udelukkende af det geometriske plan. De er så kendetegnet ved at *parallelle linjer afbildes i parallelle linjer*. Det følger af definitionen at en affin transformations omvendte transformation selv er affin. Det geometriske plan kaldes også det *affine plan*.

En affin transformation er bestemt ved hvordan den afbilder tre punkter i det geometriske plan som ikke ligger på en linje. Lad nemlig A, B, C være tre sådanne punkter og A', B', C' deres billeder. Lad D, E, D', E' være de uendelig fjerne punkter på linjerne $AB, AC, A'B', A'C'$, og lad F og F' være bestemt ved at $ABFC$ og $A'B'F'C'$ er parallelogrammer. Når afbildningen er affin, afbildes D i D', E i E' og dermed F i F'. Da ikke tre af punkterne A, D, E, F ligger på en linje, er transformationen bestemt ved afbildningen af disse fire punkter. De og deres billeder er givet entydigt ved A, B, C, A', B', C'. Da konstruktionen er mulig for vilkårlige A, B, C, A', B', C' hvis ikke A, B, C eller A', B', C' ligger på en linje, findes der i ethvert sådant tilfælde en affin transformation som afbilder A, B, C i A', B', C'.

2.4 Ekstra øvelse. Kan springes over

Hvis $A, B, C, A', B', C', O, P, Q, R$ ligger i det geometriske plan, kan Desargues' sætning også vises ved at figuren betragtes som en projektion til det geometriske plan af en rumlig figur hvor det punkt som projiceres til A, ligger uden for planet. Gennemfør dette bevis.

3 Harmonisk konjugation

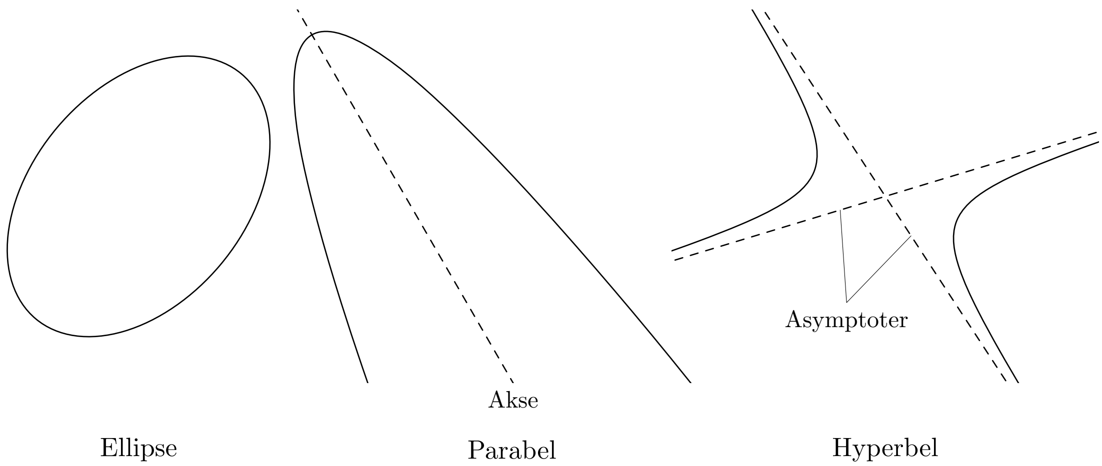


Hvis A, B, C, D er forskellige punkter på en linje l, siges D at være C's *harmonisk konjugerede med hensyn til A og B* hvis der findes en projektiv transformation som afbilder l i en linje som ikke er den uendelig fjerne, D i denne linjes uendelig fjerne punkt og C i midtpunktet af linjestykket AB. Vælger man to forskellige punkter P og Q uden for l så C, P, Q ligger på en linje, og sætter $AP \cap BQ = R$ og $AQ \cap BP = S$, så gælder efter transformationen enten $RS \parallel l$ eller at både R og S er uendelig fjerne. I begge tilfælder ligger D på RS. At der gælder enten $RS \parallel l$ eller at både R og S er uendelig fjerne, følger af at affiniteten[1] som vist. Figuren kan nemlig transformeres projektivt så D og P bliver uendelig fjerne, og de øvrige punkter dermed kommer til at ligge i det geometriske plan. Derved bliver $ABSR$ et parallelogram. I dette parallelogram ligger diagonalernes skæringspunkt Q midt mellem siderne AR og BS. Da CQ er parallel med disse sider, er C så midtpunkt af linjestykket AB. Definitionen er altså ensbetydende med at punkterne indgår i en sådan figur. Figuren kan konstrueres og D dermed bestemmes

[1] En *affinitet* med akse m, retning l og forvandlingstal $k \neq 0$, hvor $m \nparallel l$, er dén affine transformation af det geometriske plan som afbilder linjer parallelle med l i sig selv og ganger punkters afstand fra m regnet med fortegn med k.

ud fra vilkårlige forskellige punkter A, B, C på en linje l. For sådanne punkter er netop ét af l's punkter derfor harmonisk konjugeret C med hensyn til A og B. Definitionen er symmetrisk i A og B. Sammenhængen er også symmetrisk i C og D fordi triplerne C, P, Q og D, R, S indgår ens i figuren. Punkterne C og D kan derfor kaldes *harmonisk konjugerede med hensyn til A og B*. Den er desuden symmetrisk i parrene $\{A, B\}$ og $\{C, D\}$, som derfor kan derfor kaldes *harmonisk konjugerede*. Ved en en projektiv transformation hvor B og P bliver uendelig fjerne, bliver S nemlig også uendelig fjernt. De øvrige punkter ligger så i det geometriske plan, og der gælder $QR \parallel l$. Dermed er $CARQ$ og $ADRQ$ parallelogrammer så vi har afstandsrelationen $CA = QR = AD$, som medfører at A er midtpunkt af linjestykket CD.

4 Keglesnit



Billedet af en cirkel ved en projektiv transformation kaldes et *keglesnit*. Afhængig af om den linje som ved den projektive transformation bliver til den uendelig fjerne, skærer cirklen i ingen, ét eller to punkter, kaldes keglesnittet en *ellipse*, *parabel* eller *hyperbel*. Skæringspunkternes billeder er de uendelig fjerne punkter på parablens akse og hyperblens asymptoter. Fordi enhver cirkel kan dannes af enhver anden cirkel ved en affin transformation sat sammen af en flytning og en multiplikation ud fra cirklens centrum, kan ethvert keglesnit dannes af ethvert andet keglesnit ved en projektiv transformation.

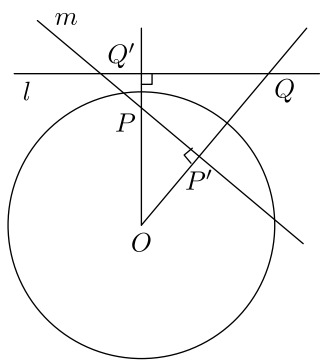
En linje kaldes *tangent* til et keglesnit hvis den har netop ét punkt fælles med det, og punktet kaldes tangentens *røringspunkt*. Et punkt siges at ligge *inden i* keglesnittet hvis det ikke ligger på keglesnittet, og enhver linje gennem punktet har mindst ét punkt fælles med det. (Der er så altid to fælles punkter). Det siges at ligge *uden for* keglesnittet hvis der findes en linje gennem punktet som ikke har noget punkt fælles med det. Hvert punkt som ikke ligger på keglesnittet, ligger så enten inden i det eller uden for det og ikke både og. Da sammenhængene i disse definitioner er uændrede ved en projektiv transformation, afbildes et keglesnits tangenter og deres røringspunkter og indre og ydre punkter i tilsvarende linjer og punkter med hensyn til det transformerede keglesnit. Et keglesnit har én tangent i hvert af sine punkter fordi dette gælder for en cirkel. Det kan vises at netop ét keglesnit indeholder fem vilkårlige punkter hvoraf ikke tre ligger på en linje. En tangent og dens røringspunkt kan træde i stedet for to af punkterne hvis tangenten ikke indholder nogen af de øvrige punkter.

5 Polarlinje og polpunkt

Lad der være givet en cirkel med centrum O og et punkt P som hverken er O eller uendelig fjernt. Linjen vinkelret på OP gennem P's inverse punkt kaldes P's *polarlinje*. Læg mærke til at *et punkt på cirklen har tangenten i punktet som polarlinje*. Polarlinjen til O defineres som den uendelig fjerne linje, og polarlinjen til et uendelig fjernt punkt P som linjen gennem O vinkelret på OP. Det vises i den følgende øvelse 5.1 at enhver linje er polarlinje til netop ét punkt. Dette punkt kaldes linjens *polpunkt*, og punktet og linjen siges at være *reciprokke*.

5.1 Øvelse

Vis at enhver linje er polarlinje til netop ét punkt.



Lad Q være et punkt på P's polarlinje l, og lad m være Q's polarlinje. Antag foreløbig at P ikke er O eller uendelig fjernt. Lad Q' være P's inverse punkt og P' projektionen af P på linjen OQ. Så har vi $OQQ' \sim OPP'$. For $Q \neq Q'$ følger dette af at trekanterne er ensvinklede, og for $Q = Q'$ af at der så også gælder $P' = P$. Ligedannetheden medfører

$$OQ \cdot OP' = OP \cdot OQ' = r^2 ,$$

hvor r er cirklens radius. Altså er P' det inverse punkt til Q, og P ligger på m. Hvis $P = O$, er l den uendelig fjerne linje, og Q dermed et uendelig fjernt punkt. Så går m gennem O, og P ligger på m. Hvis P er et uendelig fjernt punkt, har vi $OQ \perp OP$ eller $Q = O$. Dermed er m enten parallel med OP eller den uendelig fjerne linje. I begge tilfælde ligger P på m. Alment gælder altså:

5.2 Sætning

Hvis Q ligger på P's polarlinje, ligger P på Q's polarlinje.

To punkter som P og Q i figuren som ligger på hinandens polarlinjer, kaldes *konjugerede* med hensyn til cirklen. Særlig er inverse punkter altså konjugerede. Det ses at sammenhængen mellem konjugerede punkter også kan udtrykkes med vektorligningen $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = r^2$.

5.3 Øvelse

Gør rede for at dualitet følger af sætning 5.2. Hvilke egenskaber ved et punkts polarlinje svarer til at punktet ligger på, inden i og uden for cirklen?

Hvis P ligger uden for cirklen, og tangenterne gennem P rører cirklen i punkterne Q og R, ligger P på både Q's og R's polarlinje. *Dermed går P's polarlinje gennem Q og R og er så linjen QR.*

5.4 Øvelse

Vis at *hvis en linje gennem et punkt P skærer cirklen i punkterne Q og R, skærer cirklens tangenter i Q og R hinanden på P's polarlinje.*

Sætning 5.2 indebærer at hvis to par af et hjørne og dets modstående side i en trekant er reciprokke med hensyn til en cirkel, gælder dette også det tredje par. En sådan trekant kaldes en *polartrekant* med hensyn til cirklen. *I en polartrekant ligger ét af hjørnerne inden i cirklen og to af dem uden for cirklen.* Dette indses sådan: Intet hjørne kan ligge på cirklen, for så ville de to andre ligge på tangenten i dette punkt, og hele trekanten dermed på en linje. Hvis et hjørne ligger inden i cirklen, ligger hele dets polarlinje uden for cirklen. Særlig ligger de to andre hjørner så uden for cirklen. Antag at hjørnet P ligger uden for cirklen, og lad X og Y være røringspunkterne for tangenterne gennem P. Så er XY polarlinje til P ifølge iagttagelsen efter øvelse 5.3, og de to andre hjørner Q og R ligger på XY. Højst ét af dem kan ligge inden i cirklen. Antag uden tab af almenhed at Q ligger uden for cirklen. Så ligger hele PQ uden for cirklen, og R ligger inden i cirklen.

5.5 Sætning

En polartrekant med hensyn til en cirkel kan med en projektiv transformation som lader cirklen uændret, afbildes så det indre hjørne bliver cirklens centrum og de ydre hjørner uendelig fjerne punkter på vinkelrette linjer.

Bevis Lad P være det indre hjørne i polartrekanten PQR, lad O være cirklens centrum, lad X og Y være PQ's skæringspunkter med cirklen, og lad Z være ét af PR's skæringspunkter med cirklen. Da ikke tre af punkterne R, X, Y, Z ligger på en linje, findes der en projektiv transformation som afbilder R i et uendelig fjernt punkt R', punkterne X og Y i endepunkter X' og Y' af cirklens diameter vinkelret på OR' og punktet Z i et skæringspunkt Z' mellem OR' og cirklen. Ved denne transformation afbildes cirklen i det keglesnit som går gennem X', Y', Z' og har tangenter i X' og Y' som er parallelle med OR'. Dette keglesnit er cirklen selv. Punktet P afbildes i $X'Y' \cap R'Z' = O$, og punktet Q i OR''s polpunkt, som er det uendelig fjerne punkt på $X'Y'$.

Af sætning 5.5 følger umiddelbart:

5.6 Sætning

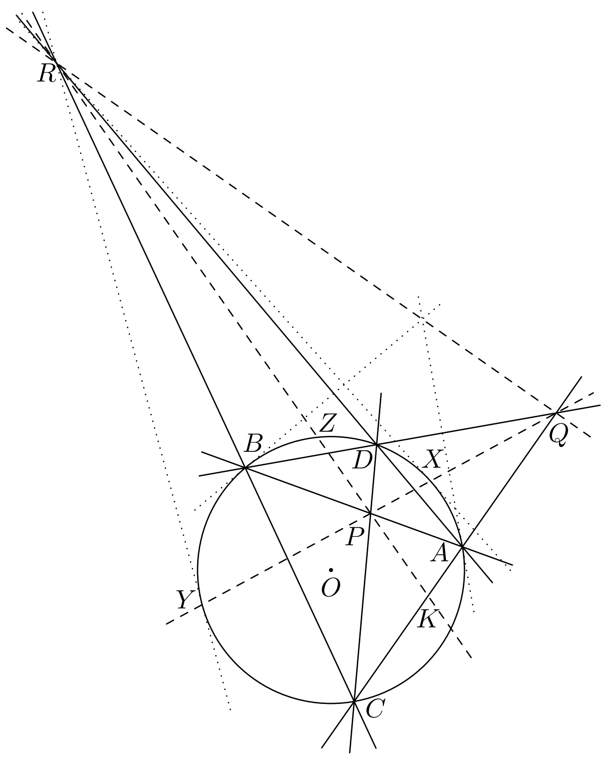
Hvis punkterne P og Q er konjugerede med hensyn til en cirkel, og PQ skærer cirklen i X og Y, så er punktparrene $\{P, Q\}$ og $\{X, Y\}$ harmonisk konjugerede. Dette gælder særlig i det tilfælde hvor PQ går gennem cirklens centrum så P og Q er inverse og XY en diagonal.

Bevis Da PQ skærer cirklen i to punkter, ligger PQ's polpunkt R uden for cirklen. Da PQR er en polartrekant, kan vi så uden tab af almenhed antage at P ligger inden i cirklen. Når polartrekanten transformeres i henhold til sætning 5.5, bliver P og Q midtpunktet af diameteren XY og det uendelig fjerne punkt på linjen XY.

Det følger af det foregående at reciprocitet med hensyn til en cirkel mellem et ydre punkt P og en linje l kan beskrives ved at P er skæringspunktet for to tangenter, og l er linjen gennem deres røringspunkter. Reciprocitet mellem et indre punkt P og en linje l kan ifølge sætning 5.2 beskrives ved at l består af polpunkterne til linjerne gennem P, og P er fælles punkt for l's punkters polarlinjer. Tidligere har vi set at reciprocitet mellem et punkt P på cirklen og en linje l kan beskrives ved at l rører cirklen i P. I alle tre tilfælde kan reciprocitet altså beskrives ved sammenhænge som er uændrede ved en projektiv transformation. Denne beskrivelse kan tages som definition af reciprocitet med hensyn til et vilkårligt keglesnit. Par af et punkt og en linje som er reciprokke med hensyn til et keglesnit, afbildes så ved en projektiv transformation i par som er reciprokke med hensyn til det transformerede keglesnit.

6 MacLaurins konfiguration

Lad A, B, C, D være forskellige punkter på en cirkel med centrum O, og lad der gælde $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$, $R = AD \cap BC$. Uden tab af almenhed kan vi antage at A, B, C, D ligger på cirklen i rækkefølgen $ACBD$. Så ligger P inden i cirklen, og Q og R uden for cirklen. Lad X og Y være cirklens skæringspunkter med R's polarlinje og Z ét af dens skæringspunkter med PR, og lad os anvende den samme projektive transformation defineret ved afbildningen af punkterne R, X, Y, Z som i beviset for sætning 5.5. Ved denne transformation afbildes P i $X'Y' \cap R'Z' = O$. Billedet $A'C'B'D'$ af firkant $ACBD$ er så et rektangel hvor siderne $A'D'$ og $B'C'$ er parallelle med OR' og siderne $A'C'$ og $B'D'$ dermed parallelle med $X'Y'$. Billedet Q' af punktet Q er da det uendelig fjerne punkt på $X'Y'$. Dermed er $OQ'R'$ og så også PQR en polartrekant. Der gælder altså:



6.1 Sætning

Hvis A, B, C, D er forskellige punkter på en cirkel, og der gælder $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$, $R = AD \cap BC$, så er PQR en polartrekant med hensyn til cirklen.

Det ses af beviset at *en indskrivelig konveks firkant altid kan transformeres til et rektangel med en projektiv transformation som lader den omskrevne cirkel uændret.* Da punkterne A, C, B, D kan være cirklens røringspunkter med en vilkårlig konveks firkant omskrevet cirklen, og tangenterne i A', C', B', D' danner en rombe, ses det desuden at *en omskrivelig konveks firkant altid kan transformeres til en rombe med en projektiv transformation som lader den indskrevne cirkel uændret.*

Det følger af øvelse 5.4 at for eksempel skæringspunktet mellem tangenterne i A og B ligger på QR. Den følgende øvelse uddyber dette.

6.2 Øvelse

Lad med betegnelserne i sætning 6.1 a, b, c, d være tangenterne i A, B, C, D, og lad der gælde $l = (a \cap b)(c \cap d)$, $m = (a \cap c)(b \cap d)$, $n = (a \cap d)(b \cap c)$. Vis $l = QR$, $m = PR$, $n = PQ$.

Linjerne l, m, n danner altså en polartrekant med hensyn til cirklen. Gør rede for at dette resultat er dualt til sætning 6.1.

Punktparrene $\{P, Q\}$ og $\{X, Y\}$ er harmonisk konjugerede ifølge sætning 5.6. Punktpar som $\{A, C\}$ og $\{K, Q\}$, hvor K er skæringspunktet mellem AC og PR, er også harmonisk konjugerede. Dette er åbenlyst i den transformerede figur. Det ses også af også af at $BPDR$ er en firkant som firkant $PRQS$ i figuren side 3. Endelig følger det af sætning 5.6 fordi K ligger på Q's polarlinje og dermed er konjugeret til Q.

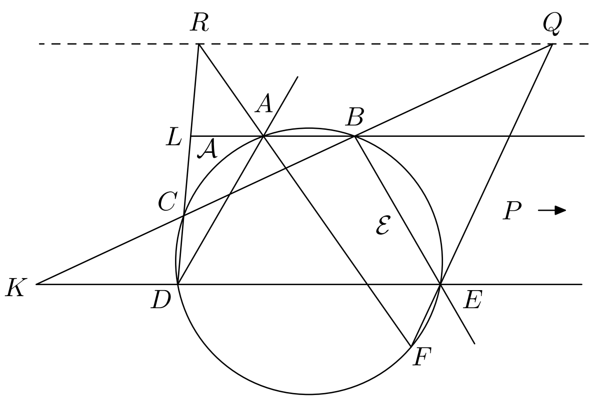
Da sammenhængene i disse sætninger er uændrede ved en projektiv transformation, gælder de i forbindelse med ikke blot cirkler men vilkårlige keglesnit. Figuren kaldes somme tider *MacLaurins konfiguration.*

7 Pascals og Brianchons sætninger

7.1 Pascals sætning

Hvis A, B, C, D, E, F er forskellige punkter på en cirkel, ligger $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$, $R = CD \cap FA$ på en linje.

Linjen kaldes sekskant $ABCDEF$'s *pascallinje.*



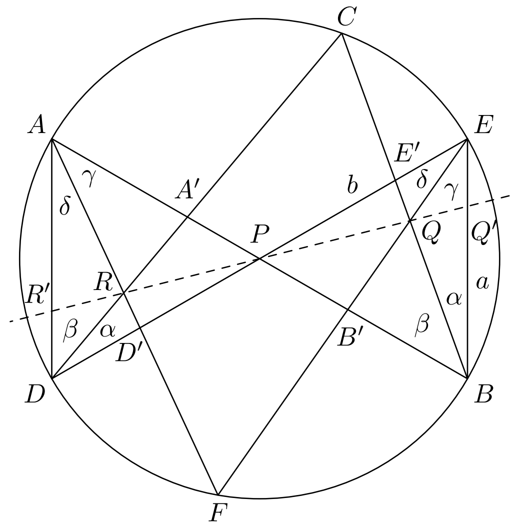
Bevis Ét af følgende er opfyldt.

a) Mindst ét af punkterne P, Q, R ligger uden for cirklen.

Vi kan uden tab af almenhed antage at P ligger uden for cirklen. Med en projektiv transformation kan vi flytte P til det uendelig fjerne og samtidig afbilde cirklen i sig selv. Det sidste opnås som i beviset for sætning 5.5 ved at skæringspunkterne mellem cirklen og P's polarlinje flyttes til skæringspunkterne mellem cirklen og det uendelig fjerne punkts polarlinje, og et tredje punkt på cirklen som ikke ligger på P's polarlinje, til et vilkårligt punkt på cirklen som ikke ligger på det uendelig fjerne punkts polarlinje. Vi har så $AB \parallel ED$. Den figur $\mathcal{E}$ som består af linjerne EB, ED, EF, er kongruent med og har samme orientering som den figur $\mathcal{A}$ som består af linjerne AB, AD, AF, fordi $\mathcal{E}$ og $\mathcal{A}$ indeholder periferivinkler som er lige store regnet med fortegn modulo

$180°$. Lad der gælde $K = ED \cap CB$, $L = AB \cap CD$. Med fortegn modulo $180°$ har vi $\angle EBC = \angle EDC = \angle ALC$ fordi periferivinklerne $\angle EBC$ og $\angle EDC$ begge spænder over korden EC, og $AL = AB \parallel ED$. Den figur som består af $\mathcal{E}$ og linjen CB, er så ligedannet med den figur som består af $\mathcal{A}$ og linjen CD. Deraf følger $BQ : BK = LR : LD$, hvor afstande på samme linje er regnet med fortegn og et forhold regnet for uendeligt hvis der indgår et uendelig fjernt punkt i den første afstand. Enten gælder så $QR \parallel AB$ så P er QR's uendelig fjerne punkt, eller også er Q og R begge uendelig fjerne så P, Q, R alle ligger på den uendelig fjerne linje.

b) Alle punkterne P, Q, R ligger inden i cirklen.



Ved at gennemprøve mulighederne finder man at punkternes rækkefølge på cirklen er A, C, E, B, F, D på nær cyklisk ombytning. Vi kan derfor uden tab af almenhed antage denne rækkefølge, som medfører at Q og R ligger inden i trekanterne BEP og ADP. Ifølge bemærkningen efter sætning 6.1 kan firkant $ADBE$ transformeres projektivt til et rektangel uden at cirklen ændres. Trekanterne BEP og ADP bliver så ligebenede og kongruente. Desuden har vi $\angle EBQ = \angle PDR$, $\angle PBQ = \angle ADR$, $\angle BEQ = \angle PAR$, $\angle PEQ = \angle DAR$ fordi disse vinker parvis er periferivinkler som spænder over samme korde. Det skal vises at P, Q, R ligger på en linje.[2] Dét er tilfældet hvis $Q' = BE \cap PQ$ deler linjestykket BE i det samme forhold som $R' = AD \cap PR$ deler AD i. For at sammenligne disse forhold kan vi sætte $BP \cap EQ = B'$, $EP \cap BQ = E'$, $AP \cap DR = A'$, $DP \cap AR = D'$, afstandene $BE = AD = a$ og $PB = PE = PA = PD = b$ og $\angle EBQ = \angle PDR = \alpha$, $\angle PBQ = \angle ADR = \beta$, $\angle BEQ = \angle PAR = \gamma$, $\angle PEQ = \angle DAR = \delta$. Forholdet $BB' : PB'$ er lig med forholdet mellem højderne fra B og P i trekanterne BEB' og PEB', som er lig med $a \sin \gamma$ og $b \sin \delta$. De øvrige tilsvarende forhold kan udtrykkes tilsvarende. Cevas sætning giver så

$$\frac{BQ'}{EQ'} = \frac{BB'}{PB'} \cdot \frac{PE'}{EE'} = \frac{a \sin \gamma}{b \sin \delta} \cdot \frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha} = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \delta},$$

$$\frac{AR'}{DR'} = \frac{AA'}{PA'} \cdot \frac{PD'}{DD'} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} \cdot \frac{b \sin \gamma}{a \sin \delta} = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \delta},$$

altså $BQ' : EQ' = AR' : DR'$. Heraf følger påstanden.

7.2 Øvelse: Brianchons sætning

Hvilken sætning er dual til Pascals?

[2] Det følgende kunne erstattes med en henvisning til en kendt følge af Cevas sætning: *Hvis linjer fra en trekants hjørner (cevianer) har et fælles punkt, så har deres* isogonale *linjer, det vil sige deres spejlbilleder i vinkelhalveringslinjerne, også et fælles punkt.* Spejler man nemlig trekant DAP i linjen gennem P parallel med DA og BE så den dækker trekant BEP, bliver BQ og DR's spejlbillede isogonale med hensyn til trekanten. Det samme gælder EQ og AR's spejlbillede. Dermed er også PQ og PR's spejlbillede isogonale ifølge sætningen.

Denne sætning kaldes *Brianchons* sætning, og det punkt hvis eksistens den slår fast, den omhandlede sekskants *brianchonpunkt*.

Pascals sætning bevarer sin gyldighed i grænsen $B \to A$ når siden AB i denne grænse forstås som tangenten i A. Det gælder også hvis mere end ét par af nabohjørner vokser sammen på denne måde. Hvis for eksempel $AB = DE$, så skæringspunktet ikke er defineret, findes der et fælles punkt for AB og DE som ligger på samme linje som et fælles punkt for BC og EF og et fælles punkt for CD og FA. Det tilsvarende gælder Brianchons sætning når $a \cap b$ i grænsen $b \to a$ forstås som det fælles røringspunkt. Se også bemærkning 2) side 19 til løsningen til opgave 9.7.

Da sammenhængene i Pascals og Brianchons sætninger er uændrede ved en projektiv transformation, gælder sætningerne i forbindelse med ikke blot cirkler men vilkårlige keglesnit. Betingelserne i disse sætninger er desuden ikke blot tilstrækkelige men også nødvendige: Hvis punkterne A, B, C, D, E, F er forskellige, og ikke tre af dem ligger på en linje, og $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$, $R = CD \cap FA$ ligger på samme linje, så ligger A, B, C, D, E, F på samme keglesnit. Dette kan udnyttes til at konstruere et keglesnit ud fra fem af dets punkter: Når A, B, C, D, E og dermed $P = AB \cap DE$ ligger fast, og Q og R bevæger sig på BC og CD så P, Q, R ligger på en linje, beskriver $F = AR \cap EQ$ keglesnittet gennem A, B, C, D, E. Den duale sætning lyder at hvis linjerne a, b, c, d, e, f er forskellige, og ikke tre af dem går gennem samme punkt, og hvis linjerne $(a \cap b)(d \cap e)$, $(b \cap c)(e \cap f)$, $(c \cap d)(f \cap a)$ går gennem samme punkt, tangerer a, b, c, d, e, f samme keglesnit.

8 Litteratur

Milivoje Lukić: *Projective Geometry*,

Her defineres begreberne *dobbeltforhold* (cross ratio) og *perspektivisk afbildning* (perspectivity), som ikke er benyttet i nærværende tekst men ofte mødes i anden litteratur om projektiv geometri. En del skrivefejl bevirker at Lukić’ tekst må læses med omtanke.

9 Opgaver

9.1 Opgave

I firkant $ABCD$ ligger punktet M_1 på linjen AB, og der gælder $M_2 = BC \cap DM_1$, $M_3 = CD \cap AM_2$ og så videre med cyklisk ombytning af A, B, C, D. Vis $M_{13} = M_1$.

(Lukić 7)

9.2 Opgave

I trekant ABC ligger punkterne K og N på linjen BC, punktet L på linjen AB, og punktet M på linjen AC. Alle de nævnte punkter er forskellige. Linjerne KM og LN skærer hinanden i et punkt O som hverken er L eller M. Linjerne CO og LK skærer hinanden i et punkt B_1, og linjerne BO og MN i et punkt C_1. Vis at AO, BB_1, CC_1 har et fælles punkt.

(Kasakhisk olympiade 2002-2003 almengjort).

9.3 Opgave

I trekant ABC er D og E punkter på siderne AB og AC så $DE \parallel BC$ og P et indre punkt i trekant ADE. Linjerne BP og CP skærer DE i F og G. Vis at A ligger på cirklerne PDG's og PFE's radikalakse.

(Lukić 9)

9.4 Opgave

Lad der være givet en trekant ABC og to punkter X og Y som ikke er A, B eller C. Linjerne AX, AY, BX, BY, CX, CY er forskellige. Lad der gælde $P_A = BX \cap CY$ og $Q_A = BY \cap CX$, og lad P_B, Q_B, P_C, Q_C være defineret tilsvarende med cyklisk ombytning af A, B, C. Vis at P_AQ_A, P_BQ_B, P_CQ_C har et fælles punkt.

(Del af Crux 2469 og 2470 almengjort)

9.5 Opgave

Lad A, B, C være forskellige punkter på en linje og P, Q, R, S forskellige punkter uden for linjen så C, P, Q ligger på en linje og C, R, S på en linje. Lad der gælde $E = AP \cap BQ$, $F = AQ \cap BP$, $G = AR \cap BS$, $H = AS \cap BR$. Vis at AB, EF, GH har et fælles punkt.

(Lukić 5 almengjort)

9.6 Opgave

Lad A, B, C, D være forskellige punkter på en linje og E, F, G, H forskellige punkter på en linje. Lad O være et punkt uden for begge linjer så $\{O, A, E\}, \{O, B, F\}, \{O, C, G\}$, $\{O, D, H\}$ ligger på hver sin linje. Vis at hvis $\{A, B\}$ og $\{C, D\}$ er harmonisk konjugerede, så er $\{E, F\}$ og $\{G, H\}$ harmonisk konjugerede.

Bemærkning: Afbilningen af A, B, C, D i E, F, G, H er et eksempel på en *perspektivisk afbildning* fra en linje til en anden. Resultatet viser at harmonisk konjugation bevares ved perspektivisk afbildning. Mere alment bevares *dobbeltforhold* (se Lukić' noter) ved perspektivisk afbildning.

9.7 Opgave

Trekant ABC's indskrevne cirkel rører siderne BC, CA, AB i punkterne M, N, P. Vis med en projektiv transformation at linjerne AM, BN, CP har et fælles punkt. Hvad er det duale resultat?

(Lukić 17 udvidet)

Bemærkning: Det første af de to resultater kan også – og måske nemmere – udledes af Cevas sætning. Punktet er trekantens *Gergonnepunkt*.

9.8 Opgave

Lad MN med midtpunkt P være korde i en cirkel, og lad AB og CD være korder gennem P så alle de nævnte punkter er forskellige, og der gælder $AC \nparallel MN$. Vis at AC og BD skærer MN i punkter som ligger lige langt fra P.

(Sommerfuglesætningen, Lukić 8)

9.9 Opgave

Find det geometriske sted for P som bevæger sig så P's polarlinjer med hensyn til tre ikke skærende cirkler har et fælles punkt.

(Universitetsoptagelsesprøve 1940 gengivet i Crux 23, 129 (1997)).

9.10 Opgave

Lad $\mathcal{C}$ være en cirkel med centrum O og diameter AB, og lad M være et punkt på AB's forlængelse så $MA > MB$. En linje gennem M som ikke er linjen AB, skærer $\mathcal{C}$ i C og D så $MC > MD$. Trekanterne OAC's og OBD's omskrevne cirkler skærer hinanden i O og K. Vis $OK \perp MK$.

(Iransk olympiade 1997).

9.11 Opgave

Givet en indskrivelig firkant $ABCD$ med $AD \neq BC$ lad diagonalerne AC og BD skære hinanden i E og linjerne AD og BC skære hinanden i F. Midtpunkterne af AB og CD er G og H. Vis at EF rører cirklen gennem punkterne E, G og H.

(Opgave G4 i IMO-kortlisten 2009)

Følgende spørgsmål leder gennem en variant af kortlistens løsning 3 med brug af resultater fra nærværende tekst.

1. Lad X og Y være E's spejlbilleder i G og H. Gøre rede for at EF rører cirkel EGH hvis den rører cirkel EXY.

2. Brug Pappos' sætning, øvelse 2.3, til at vise at F, X, Y ligger på en linje. Gør rede for at EF så rører cirkel EXY hvis $XF \cdot YF = EF^2$.

3. Ifølge sætning 6.1 er E og F konjugerede med hensyn til cirkel $ABCD$. Brug dette til at vise $XF \cdot YF = EF^2$.

9.12 Opgave

Firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med centrum O. Linjerne AB og CD skærer hinanden i punktet E, og linjerne AC og BD skærer hinanden i punktet F. Trekanterne ADF's og BCF's omskrevne cirkler mødes foruden i F i et punkt H som ikke er O. Vis $EH \perp FH$.

(Lukić 20)

9.13 Opgave

En konveks firkant $ABCD$ er både indskrivelig og omskrivelig, og siderne AB, BC, CD, DA rører den indskrevne cirkel i punkter P, Q, R, S. Vis at den om- og indskrevne cirkels centre, diagonalernes skæringspunkt og skæringspunktet mellem linjerne PR og QS ligger på en linje.

(Crux 3256)

9.14 Opgave

I den indskrivelige konvekse firkant $ABCD$ er P skæringspunktet mellem $\angle DAB$'s og $\angle ABC$'s halveringslinjer. Punkterne Q, R, S er defineret tilsvarende med cyklisk ombytning af A, B, C, D, og det antages at punkterne P, Q, R, S er forskellige. Vis: a) Firkant $PQRS$ er indskrivelig. b) Diagonalernes skæringspunkt i firkant $ABCD$ og centrene for firkanterne $ABCD$'s og $PQRS$'s omskrevne cirkler ligger på en linje. c) $PR \perp QS$.

(Crux 2978).

9.15 Opgave

En trekant ABC og et punkt T som ikke er B eller C, er givet. Lad P og Q betegne projektionerne af T på AB og AC og R og S projektionerne af A på BT og CT. Alle de nævnte punkter er forskellige. Vis at PS og QR mødes på linjen BC.

(Lukić 11)

9.16 Opgave

En linje gennem et punkt M skærer siderne BC, CA, AB i en trekant ABC i punkter A_1, B_1, C_1, og linjerne AM, BM, CM skærer ABC's omskrevne cirkel i punkter A_2, B_2, C_2. Alle de nævnte punkter er forskellige, og ingen af linjerne A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 er tangent til den omskrevne cirkel eller indeholder andre af de nævnte punkter. Vis at disse linjer har et fælles punkt som ligger på den omskrevne cirkel.

(Lukić 12)

9.17 Opgave

I trekant ABC, som ikke er ret, er BE og CF højder. To cirkler gennem punkterne A og F rører linjen BC i forskellige punkter P og Q. Vis at linjerne PE og QF skærer hinanden på trekant AEF's omskrevne cirkel.

(Opgave G4 i IMO-kortlisten 2008 let almengjort)

Løs opgaven ved at anvende Pascals sætning på trekant AEF's omskrevne cirkel. Dette er kortlistens løsning 2.

10 Løsninger

Øvelse 1.1

Gennem to forskellige punkter A og B i det geometriske plan går der netop én linje. Hvis A ligger i det geometriske plan, og B er uendelig fjernt, ligger B på en linje l som ikke er den uendelig fjerne. En linje i det geometriske plan går gennem A og B hvis og kun hvis den går gennem A og er parallel med l. Dette opfylder netop én linje i det geometriske plan, og den uendelig fjerne linje går ikke gennem A. Hvis A og B begge er uendelig fjerne, går den uendelig fjerne linje gennem dem begge, og det gør ingen linje i det geometriske plan fordi den kun har ét uendelig fjernt punkt.

Hvis to forskellige linjer l og m i det gemetriske plan ikke er parallelle, har de netop ét fælles punkt i det geometriske plan, og deres uendelig fjerne punkter er forskellige. Er de parallelle, har de ingen fælles punkter i det geometriske plan og samme uendelig fjerne punkt. Hvis l ligger i det geometriske plan, og m er den uendelig fjerne linje, er l's uendelig fjerne punkt eneste fælles punkt for de to linjer.

Øvelse 2.2

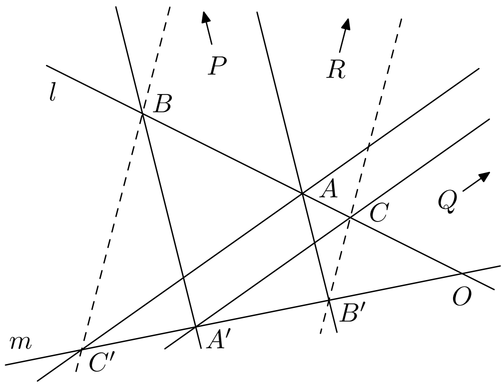
Den omvendte sætning lyder: *Under antagelser som i Desargues' sætning gælder det at hvis $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$ ligger på en linje, har AA', BB', CC' et fælles punkt.*

Bevis for sætningen: Den fælles linje l for de tre skæringspunkter kan flyttes til det uendelig fjerne med en projektiv transformation. Som i beviset for Desargues' sætning ligger A, B, C, A', B', C' så i det geometriske plan. Da trekanterne ABC og $A'B'C'$ har parvis parallelle sider, findes der et, eventuelt uendelig fjernt, centrum O for en multiplikation eller parallelforskydning som afbilder ABC i $A'B'C'$.

At sætningerne er duale, ses af at de er forbundet gennem ombytning af punktet O med linjen l, linjerne AA', BB', CC' med punkterne P, Q, R og punkterne A, B, C, A', B', C' med linjerne $AB, AC, BC, A'B', A'C', B'C'$. Sætningernes fælles antagelser er duale med sig selv: At punkterne A, B, C ikke ligger på en linje, vil sige at ABC er en trekant, og ligesådan for A', B', C'. Tilsvarende danner tre linjer en trekant hvis og kun hvis de ikke har et fælles punkt. Antagelserne angående $\{A, B, A', B'\}, \{A, C, A', C'\}, \{B, C, B', C'\}$ kan sammenfattes til at intet hjørne i trekant ABC ligger på en linje som indeholder en side i trekant $A'B'C'$ og går gennem det tilsvarende hjørne dér, og omvendt. Man får et udsagn med det samme indhold når man her bytter »hjørne ligger på linje som indeholder side« om med »linje som indeholder side, går gennem hjørne«.

Øvelse 2.3

Lad O være skæringspunktet mellem de to linjer l og m som indeholder A, B, C og A', B', C', og lad der gælde $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$, $R = BC' \cap B'C$. Vi har $P \neq A$, for ellers ville A' ligge på l i modstrid med at O er det eneste fælles punkt for l og m. Tilsvarende $Q \neq A$. Dermed kan A, P, Q ikke ligge på en linje, for så ville B' og C' også ligge på denne linje, som så måtte være m, som ikke indeholder A. Som i beviset for Desargues' sætning kan P og Q uden tab af almenhed lægges uendelig fjernt. Så ligger A i det geometriske plan. På samme måde som $P \neq A$ indses $P \neq B'$. Da P er eneste uendelig fjerne punkt på AP, ligger B' så også i det geometriske plan. Tilsvarende C' og A', B, C.



Vi har nu $AB' \parallel BA'$ og $AC' \parallel CA'$. Der findes derfor en multiplikation ud fra O eller, hvis O er uendelig fjernt, en parallelforskydning $\mathcal{T}_1$ som afbilder linjestykket BA' i linjestykket AB', og en multiplikation ud fra O eller parallelforskydning $\mathcal{T}_2$ som afbilder linjestykket AC' i linjestykket CA'. Når $\mathcal{T}_2$ udføres efter $\mathcal{T}_1$, afbildes B i C, og når $\mathcal{T}_1$ udføres efter $\mathcal{T}_2$, afbildes C' i B'. Resultatet afhænger ikke af rækkefølgen når to multiplikationer ud fra det samme punkt eller to parallelforskydninger udføres efter hinanden. Da den sammensatte transformation afbilder linjestykket BC' i linjestykket CB', har vi $BC' \parallel CB'$. Dermed ligger R på den uendelig fjerne linje sammen med P og Q.

Den duale til Pappos' sætning kan udtrykkes sådan: *Hvis linjerne a, b, c har et fælles punkt L og linjerne a', b', c' et andet fælles punkt M, og de alle er forskellige og forskellige fra LM, og hvis $X = a \cap b'$, $Y = a' \cap b$, $Z = a \cap c'$, $W = a' \cap c$, $U = b \cap c'$, $V = b' \cap c$, så har XY, ZW, UV et fælles punkt.* Dette vil blive vist at følge af Pappos' sætning. Når man bytter op på »punkt« og »linje« og »ligger på« og »går gennem« i beviset, har man så et bevis for at Pappos' sætning følger af den duale. Dermed er de to sætninger ensbetydende, så Pappos' sætning er sin egen duale.

Bevis: Punkterne L, Z, X ligger på a, og M, Y, W på a'. Den duale sætnings forudsætninger indebærer at L, M, X, Y, Z, W, U, V er forskellige og forskellige fra $a \cap a'$. Desuden er U fælles punkt for $LY = b$ og $MZ = c'$, og V fælles punkt for $MX = b'$ og $LW = c$. Ifølge Pappos' sætning går UV så gennem $XY \cap ZW$.

Øvelse 2.4

I figuren side 2 kan vi forstille os A, A', P forskudt vinkelret på figurens plan proportionalt med afstanden fra BB' regnet med fortegn i forhold til en valgt normalretning. Vi kan forestille os A, A', Q forskudt tilsvarende proportionalt med en afstand fra CC' regnet med fortegn. Da A og A' har proportionale afstande fra BB' og CC', kan proportionalitetskonstanterne vælges så forskydningen af disse to punkter bliver den samme i begge tilfælde. Efter disse forkydninger ligger $\{O, A, A'\}$, $\{A, B, P\}$, $\{A', B', P\}$, $\{A, C, Q\}$, $\{A', C', Q\}$ stadig på linjer. Da A ikke længere ligger i figurens plan, har planet ABC efter forskydningerne kun linjen BC fælles med figurens plan. Særlig ligger O, som ikke ligger på BC da B' eller C' så ville ligge på BC, og dermed A' uden for planet ABC. Planerne ABC og $A'B'C'$ er så forskellige. Da P ligger på AB, som ligger i ABC, og på $A'B'$, som ligger i $A'B'C'$, har de to planer punktet P fælles. Tilsvarende Q og R. De skærer så hinanden i en linje som indeholder disse tre punkter. Punkterne ligger dermed på en linje, og dette gælder så også efter projektion tilbage til figurens plan.

Øvelse 5.1

Hvis en linje l hverken er den uendelig fjerne linje eller går gennem O, er l kun polarlinje til et punkt P som hverken er O eller uendelig fjernt. Hvis Q så er P's inverse punkt, gælder

$l \perp OP$ hvis og kun hvis $l \perp OQ$. Dette og at l går gennem Q, er opfyldt af netop ét punkt Q nemlig O's projektion på l, og dermed af netop ét punkt P. Den uendelig fjerne linje er polarlinje for O og ikke for noget punkt i det geometriske plan. Hvis l går gennem O, kan l kun være polarlinje til et uendelig fjernt punkt. Dette punkt P har l som polarlinje hvis og kun hvis der gælder $l \perp OP$, og dette opfylder netop ét uendelig fjernt punkt P nemlig det uendelig fjerne punkt på linjen gennem O vinkelret på l.

Øvelse 5.3

Hvis man i en sætning skifter ethvert punkt ud med sin polarlinje, og enhver linje med sit polpunkt, gælder ifølge sætning 5.2 ethvert »ligger på« eller »går gennem« i den nye, »duale«, sætning hvis det tilsvarende »går gennem« eller »ligger på« gælder i den oprindelige sætning. Hvis en sætning gælder, gælder derfor også den duale sætning.

Hvis punktet P ikke er cirklens centrum O eller det uendelig fjerne punkt, ligger P's inverse punkt Q på, uden for og inden i cirklen hvis P ligger på, inden i og uden for cirklen. Dermed har P's polarlinje l ét, ingen og to punkter fælles med cirklen i de tre tilfælde. Hvis der gælder $P = O$, er l den uendelig fjerne linje og har så ingen punkter fælles med cirklen. Hvis P er et uendelig fjernt punkt, går l gennem O og har så to punkter fælles med cirklen. Alt i alt har l dermed ét, ingen og to punkter fælles med cirklen når P ligger på, inden i og uden for cirklen. Særlig er, som også er indset tidligere, l tangent til cirklen hvis P ligger på cirklen.

Øvelse 5.4

Tangenternes skæringspunkt er polpunkt til QR, som indeholder P. Ifølge sætning 5.2 ligger det så på P's polarlinje.

Øvelse 6.2

I den transformerede figur er det åbenlyst fordi den er spejlsymmetrisk om OQ' og OR'. Et mere formelt argument, som samtidig viser dualiteten mellem sætning 6.1 og det at l, m, n danner en polartrekant, er dette: Tangenterne a, b, c, d er polarlinjer til punkterne A, B, C, D. Tangenternes skæringspunkter er så polpunkter til sekanterne $AB, AC, \dots,$ og linjerne l, m, n polarlinjer til sekanternes skæringspunkter P, Q, R. Dermed er l, m, n siderne i polartrekanten PQR.

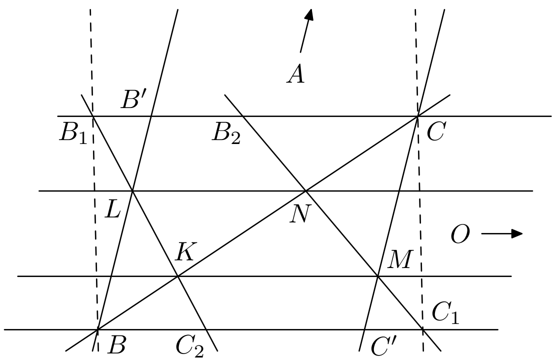
Øvelse 7.2

For en vilkårlig sekskant $ABCDEF$ omskrevet cirklen er sidernes røringspunkter hjørner i en indskrevet sekskant $GHIJKL$. Hjørnerne i $ABCDEF$ er så polpunkter til siderne i $GHIJKL$, og linjerne gennem modstående hjørner i $ABCDEF$ polarlinjer til skæringspunkterne mellem modstående sider i $GHIJLKL$. Da disse skæringspunkter ligger på en linje ifølge Pascals sætning, mødes linjerne gennem modstående hjørner i $ABCDEF$ i denne linjes polpunkt. Som dual til Pascals sætning har vi dermed *Brianchons sætning: Hvis sekskant $ABCDEF$ er omskrevet en cirkel, har diagonalerne AB, CD, EF et fælles punkt.* At $ABCDEF$ er »omskrevet« en cirkel betyder i denne forbindelse kun at for eksempel *linjen* AB rører cirklen. Røringspunktet behøver ikke være indre punkt af *linjestykket* AB.

Opgave 9.1

Da enhver firkant kan transformeres projektivt til et parallelogram (endda et kvadrat), kan $ABCD$ uden tab af almenhed antages at være et parallelogram. Vi kan så betragte linjen AB som en talakse med begyndelsespunkt A og enhedspunkt B og definere tallet x_1 som M_1's kooordinat på denne akse. Det uendelig fjerne punkt på AB kan tilskrives koordinaten ∞. Vi kan definere $x_2, x_3, \dots$ tilsvarende med cyklisk ombytning af A, B, C, D. Af ensvinklede trekanter fås så $x_{n+1} = (x_n - 1)/x_n$ for $x_n \neq 0, 1, \infty$. Simple geometriske overvejelser giver $x_{n+1} = \infty, 0, 1$ for $x_n = 0, 1, \infty$. Heraf følger i alle tilfælde $x_{n+3} = x_n$ og dermed $x_{13} = x_1$ fordi $13 - 1$ er deleligt med 3. Fordi $13 - 1$ er deleligt med 4, ligger M_{13} og M_1 begge på AB. Dermed $M_{13} = M_1$.

Opgave 9.2



Punktet O ligger ikke på AB, for så ville N ligge på AB og dermed være det samme punkt som B. Tilsvarende ligger O ikke på AC. Punktet O ligger heller ikke på BC, for så ville enten L eller M også ligge på BC og dermed være det samme punkt som B eller C. Med en projektiv transformation kan punkterne A og O lægges uendelig fjernt. Da O ikke liggger på AB eller AC, ligger B og C så i det geometriske plan. Det samme gør L og M fordi de er punkter på AB og AC som ikke er A, og K og N fordi de er punkter på MO og LO som ikke er O. Med $B' = AB \cap CO$ og $C' = AC \cap BO$ har vi så $BB' \parallel CC'$ og $BC' \parallel CB' \parallel KM \parallel NL$. Vi kan desuden indføre $B_2 = NM \cap CO$ og $C_2 = KL \cap BO$. Siderne af trekanterne BKC_2 og $C'MC_1$ på BO forholder sig da til siderne af trekanterne CKB_1 og CMB_2 på CO som de to førstnævntes fælles højde til de to sidstnævntes. Når længder på BO og CO regnes med fortegn i retningerne BC' og CB', har vi dermed

$$\frac{BC_2}{CB_1} = \frac{C'C_1}{CB_2}\,, \quad \text{eller} \quad C'C_1 \cdot CB_1 = BC_2 \cdot CB_2\,.$$

Af trekanterne CNB_2, $B'LB_1$, BNC_1, BLC_2 fås tilsvarende $B'B_1 \cdot BC_1 = CB_2 \cdot BC_2$ så vi har

$$C'C_1 \cdot CB_1 = B'B_1 \cdot BC_1\,.$$

Når $BC_1 \cdot CB_1$ trækkes fra begge sider af denne ligning, får man

$$C'B \cdot CB_1 = B'C \cdot BC_1\,,$$

og da der gælder $C'B = B'C$, følger heraf

$$CB_1 = BC_1\,.$$

Dette medfører $BB_1 \parallel CC_1$. Altså mødes BB_1 og CC_1 på den uendelig fjerne linje AO.

Bemærkning: Ifølge Desargues' sætning og dens omvendte anvendt på trekanterne BB_1B' og CC_1C' er opgavens påstand ensbetydende med at $BC, B_1C_1, B'C'$ har et fælles punkt. Også dette følger i den transformerede figur af $CB_1 = BC_1$. Punktet er dér BC''s midtpunkt. Det ses at være harmonisk konjugeret til skæringspunktet mellem BC og AO, som er BC's uendelig fjerne punkt i den transformerede figur, med hensyn til B og C.

Opgave 9.3

Da F ligger på korden DG i cirkel PDG, er F et indre punkt i cirklen, og dén og cirkel PFE skærer hinanden i et punkt Q foruden P. Det skal så vises at A, P, Q ligger på en linje. Med $J = BP \cap DQ$ og $K = CP \cap EQ$ følger dette af Desargues' sætning anvendt på trekanterne BDJ og CEK hvis vi kan vise $JK \parallel DE$. Lad os dertil indføre $T = DE \cap PQ$. Da T ligger på cirklernes radikalakse PQ, har vi

$$TD \cdot TG = TE \cdot TF\,, \quad \text{eller} \quad \frac{TF}{TD} = \frac{TG}{TE}\,.$$

Punktet F deler altså linjestykket TD i samme forhold som punktet G deler linjestykket TE i. Den affinitet med akse PQ og retning DE som afbilder D i E, afbilder så F i G og dermed J i K. Heraf følger $JK \parallel DE$.

Opgave 9.4

Da AX og AY er forskellige, er AXY en ikke udartet trekant. Dermed er X og Y forskellige, og XY forskellig fra AX og AY. Tilsvarende er XY forskellig fra BX, BY, CX, CY. Påstanden følger så umiddelbart af Pappos' sætning i dens duale form anvendt på de to sæt af linjer (AX, BX, CX) og (AY, BY, CY).

Opgave 9.5

Med $K = AB \cap EF$ og $L = AB \cap GH$ følger det af afsnit 3 at både K og L er C's harmonisk konjugerede med hensyn til A og B. Dermed $K = L$.

Opgave 9.6

Lad p være den linje som indeholder A, B, C, D, lad q være den linje som indeholder E, F, G, H, lad k være den linje som indeholder O, A, E, lad l være den linje som indeholder O, B, F, lad m være den linje som indeholder O, C, G, og lad n være den linje som indeholder O, D, H. Uden tab af almenhed kan vi antage at n er den uendelig fjerne linje. Da O ikke ligger på p, er D så det eneste uendelig fjerne punkt på p. Tilsvarende er H det eneste uendelig fjerne punkt på q. Linjerne k, l, m er så ikke uendelig fjerne. Da de har det uendelig fjerne punkt O fælles, er de da parallelle. Hvis $\{A, B\}$ og $\{C, D\}$ er harmonisk konjugerede punktpar, er C så midtpunktet af linjestykket AB. Dermed ligger m midt mellem k og l, så G er midtpunktet af linjestykket EF, og $\{E, F\}$ og $\{G, H\}$ er harmonisk konjugerede punktpar.

Opgave 9.7

Lad $A'B'C'$ være en ligesidet trekant omskrevet ABC's indskrevne cirkel og M', N', P' cirklens røringspunkter med $B'C', C'A', A'B'$. En projektiv transformation afbilder A, M, N, P i A', M', N', P'. Derved afbildes cirklen i det keglesnit som rører $A'B'$ i P' og $C'A'$ i N' og går gennem M', altså cirklen selv. Cirklens tangent BC i M afbildes i cirklens tangent $B'C'$ i M'. Dermed afbildes $B = AB \cap BC$ i $B' = A'B' \cap B'C'$. Tilsvarende C. Alt i alt afbildes A, B, C, M, N, P så i A', B', C', M', N', P'. Da $A'M', B'N', C'P'$ går gennem cirklens centrum O, går AM, BN, CP så gennem O's billede ved den omvendte transformation.

Ved at erstatte punkter med deres polarlinjer og linjer med deres polpunkter ser man at det duale resultat er at $AB \cap MN$, $BC \cap NP$, $CA \cap PM$ ligger på en linje. Her er det benyttet at NP, PM, MN er polarlinjer til A, B, C ifølge iagttagelsen efter øvelse 5.3.

Bemærkninger: 1) Løsningen viser at *enhver trekant kan transformeres til en ligesidet trekant med en projektiv transformation som lader den omskrevne cirkel uændret*, og *enhver trekant kan transformeres til en ligesidet trekant med en projektiv transformation som lader den indskrevne cirkel uændret*. Transformationerne er forskellige medmindre trekanten er ligesidet. 2) Resultaterne kan ses som grænsetilfælde af Brianchons og Pascals sætninger hvor par af punkter på cirklen ligger uendelig tæt.

Opgave 9.8

Hvis E er midpunkt af én af cirkelbuerne MN, findes der en projektiv transformation som afbilder E i sig selv, MN i en diameter XY parallel med MN og MN's inverse punkt i det uendelig fjerne punkt på PE. Ved denne projektive transformation afbildes cirklen i det keglesnit som går gennem X, Y, E og har tangenter i X og Y parallelle med PE, altså cirklen selv. Hvis man spejler figuren i PE før og efter transformationen, bliver der fire punkter som definerer den, afbildet på samme måde. Dette er derfor den samme projektive transformation. Par af punkter som ligger symmetrisk om PE, afbildes derfor i sådanne par. Dette gælder så også den inverse transformation. Punktet P afbildes i cirklens centrum O. Hvis A', B', C', D' er billederne af A, B, C, D, ligger A' og B' derfor symmetrisk om O, og tilsvarende C' og D'. Det samme gælder så $A'C'$'s og $B'D'$'s skæringspunkter med XY. Heraf følger påstanden.

Opgave 9.9

Opgaven diskuteres uden indskrænkning til det tilfælde hvor cirklerne ikke skærer hinanden, og det underforstås at alle de punkter der omtales i det følgende, ligger i det geometriske plan. Lad C og r være centrum og radius for én af cirklerne. Punkterne P og Q er konjugerede med hensyn til denne cirkel hvis og kun hvis Q's projektion Q' på CP er P's inverse punkt, altså $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = CP \cdot CQ' = r^2$. Dette kan skrives som $CM^2 - MP^2 = r^2$, hvor M er PQ's midtpunkt. For at denne ligning er opfyldt for alle tre cirkler, er det nødvendigt at M's potens $CM^2 - r^2$ har samme værdi p med hensyn til dem alle. Hvis dét er opfyldt, og der gælder $MP^2 = p$, er ligningen opfyldt for alle cirklerne. Dermed er P's spejlbillede i M så konjugeret til P med hensyn til dem alle. Altså har P et fælles konjugeret punkt med hensyn til alle cirklerne hvis og kun hvis der findes et punkt M med samme potens p med hensyn til alle cirklerne, og der gælder $MP^2 = p$.

Et punkt har samme potens med hensyn til alle cirklerne hvis og kun hvis det er fælles for to radikalakser. Det ligger så også på den tredje radikalakse. Lad os først antage at netop ét punkt M opfylder dette. Dét er tilfældet hvis og kun hvis to radikalakser er forskellige og ikke parallelle, altså hvis og kun hvis cirklernes centre ikke ligger på en linje. Lad p være cirklernes potens i M. For $p > 0$ har P så et fælles konjugeret punkt med hensyn til alle cirklerne hvis og kun hvis P ligger på cirklen med centrum M og radius $\sqrt{p}$. For $p = 0$ er det opfyldt for $P = M$ og ikke af andre punkter P, og for $p < 0$ er det ikke opfyldt af noget punkt P. For $p > 0$ ligger M uden for cirklerne, for $p = 0$ går cirklerne gennem M, og for $p < 0$ ligger M inden i cirklerne. Det er tilstrækkeligt til men ikke nødvendigt for at M ligger uden for cirklerne, at intet punkt er fælles for to af dem, fordi radikalaksen for hvert par af cirkler så ligger uden for disse to cirkler.

Hvis cirklernes centre ligger på en linje l, er radikalakserne vinkelrette på l. Hvis to af dem er forskellige, findes der så intet punkt M med samme potens med hensyn til alle tre cirkler og dermed intet punkt P som har et fælles konjugeret punkt med hensyn til dem alle. Antag at en linje m er radikalakse for to par af cirkler og dermed for det tredje par. Lad os indføre et koordinatsystem med førsteakse på l og andenakse på m og kalde begyndelsespunktet for O og cirklernes fælles potens i O for p_0. Et punkt M har samme potens p med hensyn til alle cirklerne hvis og kun det ligger på m og altså har koordinater af formen $(0, a)$, og der gælder så $p = p_0 + a^2$. Hvis P's koordinater betegnes med (x, y), kan ligningen $MP^2 = p$ skrives $x^2 + (y - a)^2 = p_0 + a^2$, eller $2ay = x^2 + y^2 - p_0$. For $y \neq 0$ har denne ligning en løsning med hensyn til a. For $y = 0$ bliver den til $x^2 = p_0$ og har så to, én eller ingen løsninger med hensyn til x afhængig af p_0's fortegn. Puntet P har altså et fælles konjugeret punkt med hensyn til alle cirklerne hvis det ikke ligger på l. Desuden gælder det for to, ét eller ingen punkter på l afhængig af p_0's fortegn. For $p_0 > 0$ er intet punkt fælles for to af cirklerne. Dét ses af at en cirkels skæringspunkter med førsteaksen har førstekoordinater x_1 og x_2 som opfylder $x_1 x_2 = p_0$. For $p_0 = 0$ er O fælles tangent for alle cirklerne, og for $p_0 < 0$ er punkterne $(0, \pm\sqrt{-p_0})$ fælles punkt for dem alle.

Opgave 9.10

Linjerne AC og BD skærer hinanden i et punkt N i det geometriske plan. Ifølge sætning 6.1 er M og N konjugerede med hensyn til $\mathcal{C}$. Da N har samme potens med hensyn til cirklerne $\mathcal{C}$ og OAC og samme potens med hensyn til cirklerne $\mathcal{C}$ og OBD, har N samme potens med hensyn til alle tre cirkler og ligger så på radikalaksen OK for cirklerne OAC og OBD. Af $OK \cdot ON = ON^2 - KN \cdot ON = ON^2 - (ON^2 - r^2) = r^2$, hvor r er $\mathcal{C}$'s radius, ses det at K og N er inverse med hensyn til $\mathcal{C}$. Dermed er MK polarlinje til N, og står så vinkelret på OK.

Opgave 9.11

1. Da cirkel EXY fås af cirkel EGH ved multiplikation i forholdet 2:1 ud fra E, har de to cirkler fælles tangent i E.

2. Anvendt på triplerne A, C, U og B, D, V, hvor U og V er de uendelig fjerne punkter på AC og BD, siger Pappos' sætning at F, X, Y ligger på en linje. (Læg mærke til at det ikke benyttes af firkant $ABCD$ er indskrivelig. Den behøver heller ikke være konveks eller egentlig. Da midtpunktet af linjestykket EF og G og H er forbundet med F, X, Y gennem multiplikationen i punkt 1, er resultatet ensbetydende med anvendelsen af lemmaet i kortlistens løsning 2 på den uegentlige firkant $ADBC$). Ligningen $XF \cdot YF = EF^2$ udtrykker så at F har potens EF^2 med hensyn til cirkel EXY, altså at EF rører cirklen.

3. (Først her benyttes det at firkant $ABCD$ er indskrivelig). Lad O og r være centrum og radius for cirkel $ABCD$, og lad $\vec{P}$ betegne vektoren $\overrightarrow{OP}$ for et hvilket som helst punkt P. Der gælder så $AE \cdot CE = \vec{E}^2 - r^2$ og de tilsvarende. Da E og F er konjugerede med hensyn til cirklen, gælder desuden $\vec{E} \cdot \vec{F} = r^2$ som vist i løsningen til opgave 9.9. Dermed har vi

$$\begin{aligned}
XF \cdot YF - EF^2 &= (\vec{X} - \vec{F}\,) \cdot (\vec{Y} - \vec{F}\,) - (\vec{E} - \vec{F}\,)^2 \\
&= (\vec{A} + \vec{B} - \vec{E} - \vec{F}\,) \cdot (\vec{C} + \vec{D} - \vec{E} - \vec{F}\,) - (\vec{E} - \vec{F}\,)^2 \\
&= (\vec{A} + \vec{B}\,) \cdot (\vec{C} + \vec{D}\,) - (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}\,) \cdot (\vec{E} + \vec{F}\,) + (\vec{E} + \vec{F}\,)^2 - (\vec{E} - \vec{F}\,)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\vec{A}-\vec{E}\,)\cdot(\vec{C}-\vec{E}\,)+(\vec{B}-\vec{E}\,)\cdot(\vec{D}-\vec{E}\,) \\
&\quad + (\vec{A}-\vec{F}\,)\cdot(\vec{D}-\vec{F}\,)+(\vec{B}-\vec{F}\,)\cdot(\vec{C}-\vec{F}\,)-2(\vec{E}^2+\vec{F}^2)+4\vec{E}\cdot\vec{F} \\
&= AE\cdot CE+BE\cdot DE+AF\cdot DF+BF\cdot CF-2(\vec{E}^2+\vec{F}^2)+4r^2=0\,.
\end{aligned}
$$

Opgave 9.12

Lad $ABCD$'s, ADF's og BCF's omskrevne cirkler være betegnet med $\mathcal{C},\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$. Når vinkler regnes med fortegn modulo 180° får man af periferivinkler i $\mathcal{C}_1$ at der gælder $\angle AHF=\angle ADF=\angle ADB$. Af $\mathcal{C}_2$ og $\mathcal{C}$ fås tilsvarende $\angle FHB=\angle ACB=\angle ADB$. Vi har så $\angle AHB=\angle AHF+\angle FHB=2\angle ADB=\angle AOB$. Dermed ligger A,B,H,O på en cirkel $\mathcal{C}_3$. Tilsvarende ligger C,D,H,O på en cirkel $\mathcal{C}_4$.

Da E ligger på radikalaksen AB for cirkelparret $\{\mathcal{C},\mathcal{C}_3\}$ og radikalaksen CD for $\{\mathcal{C},\mathcal{C}_4\}$, ligger E på radikalaksen OH for $\{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_4\}$. Af cirklerne $\mathcal{C},\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ fås tilsvarende at $G=AD\cap BC$ ligger på FH. Ifølge sætning 6.1 er E polpunkt til FG. Heraf $OE\perp FG$ og dermed $EH\perp FH$.

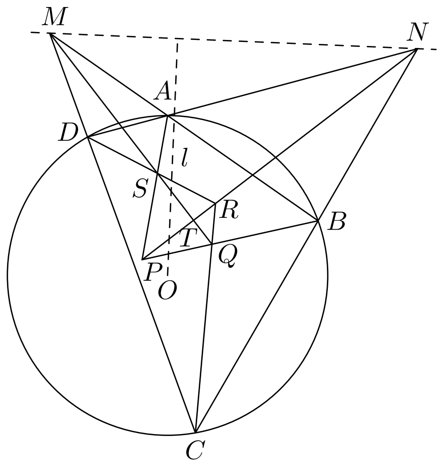
Opgave 9.13

Hvis begge par af modstående sider i firkant $ABCD$ er parallelle, er firkanten et rektangel fordi den er indskrivelig, og en rombe fordi den er omskrivelig. Den er så et kvadrat. Diagonalernes skæringspunkt, $PR\cap QS$ og den om- og indskrevne cirkels centre ligger da alle i kvadratets centrum og dermed på en vilkårlig linje gennem kvadratets centrum. Antag herefter uden tab af almenhed at AB og CD ikke er parallelle. Da $ABCD$'s sider er tangenter til $PQRS$'s omskrevne cirkel i denne firkants hjørner, går diagonalerne AC og BD gennem $PR\cap QS$ følge øvelse 6.2. Dermed er diagonalernes skæringspunkt og $PR\cap QS$ det samme punkt E. Lad os indføre $F=AB\cap CD$ og $G=BC\cap DA$. Med hensyn til $ABCD$'s omskrevne cirkel er E så polpunkt til FG ifølge sætning 6.1. Med hensyn til $ABCD$'s indskrevne cirkel er PR polarlinje til F og QS polarlinje til G ifølge iagttagelsen efter øvelse 5.3. Dermed er $E=PR\cap QS$ polpunkt til FG med hensyn til til den indskrevne cirkel. Da AB og CD ikke er parallelle, ligger F ikke på den uendelig fjerne linje, og FG er så ikke den uendelig fjerne linje. Linjen gennem E vinkelret på FG går da gennem centrene for begge cirkler.

Opgave 9.14

Da punkterne P,Q,R,S er forskellige, har de brudte linjer APB og DRC enten to skæringspunkter, som så er S og Q, eller de skærer ikke hinanden. Hvis de ikke skærer hinanden, ligger S på forlængelserne af linjestykkerne AP og DR, og Q på forlængelserne af linjestykkerne BP og CR, og de brudte linjer ASD og BQC skærer så hinanden i punkterne P og R. Vi kan derfor uden tab af almenhed antage at de brudte linjer APB og DRC skærer hinanden. Vinklerne P og R i trekanterne APB og CRD er så modstående vinkler i firkant $PQRS$. Alle vinklerne i de to trekanter er $2\cdot180°$ tilsammen, og alle vinklerne undtagen de to nævnte er $360°/2$ tilsammen. Dermed er de to vinkler $2\cdot180°-360°/2=180°$ tilsammen, og firkant $PQRS$ er indskrivelig. Dette opfylder a). Resultatet gælder for enhver konveks firkant, indskrivelig eller ej.

Hvis der gælder $AB \parallel DC$ eller $AD \parallel BC$, er $ABCD$ et ligebenet trapez. Punktet $AC \cap BD$ og centrene for cirklerne $ABCD$ og $PQRS$ ligger så på trapezets spejlingsakse. Dermed er b) opfyldt. Egenskaben c) følger af at enten PR eller QS ligger på spejlingsaksen.



Vi kan herefter antage at AB og DC mødes i et punkt M og AD og BC i et punkt N, og uden tab af almenhed kan vi antage at M og N ligger på linjestykkerne BA's og DA's forlængelser ud over A. Så er Q skæringspunkt for to indre vinkelhalveringslinjer i trekant BCM, og S er skæringspunkt for to ydre vinkelhalveringslinjer i trekant ADM. Dermed ligger Q og S på $\angle BMC$'s halveringslinje. Der gælder $\angle BAD = \angle ABC + \angle BMC$ fordi begge sider af denne ligning er supplementvinkler til $\angle BCD$. Halvering af alle ligningens vinkler giver $\angle BAS = \angle ABQ + \angle BMQ$, hvor højre side er supplementvinkel til $\angle BQS$. Dermed er firkant $ABQS$ indskrivelig. Punktet M har så samme potens med hensyn til cirklerne $ABCD$ og $PQRS$, og ligger da på deres radikalakse. På samme måde ligger punkterne P og R på $\angle CND$'s halveringslinje, og et tilsvarende argument viser at N ligger på radikalaksen for cirklerne $ABCD$ og $PQRS$. Radikalaksen er så MN. Centrum O for cirkel $ABCD$ og centrum for cirkel $PQRS$ ligger da begge på linjen l gennem O vinkelret på MN. Ifølge sætning 6.1 er $AC \cap BD$ polpunkt til MN og ligger så også på l. Dette opfylder b).

Hvis T er skæringspunktet mellem PR og QS, har vi $\angle MTN = \angle MAN - \angle BMC/2 - \angle CND/2 = \angle BAD - (180° - \angle ABC - \angle BCD)/2 - (180° - \angle BCD - \angle ADC)/2 = \angle BAD + \angle BCD + (\angle ABC + \angle ADC)/2 - 180° = 180° + 180°/2 - 180° = 90°$. Dette opfylder c).

Opgave 9.15

Punkterne P, Q, R, S ligger alle på cirklen med diameter AT, og der gælder $AP \cap RT = B$, $AQ \cap ST = C$. Påstanden følger så af Pascals sætning anvendt på punkterne P, A, Q, R, T, S.

Opgave 9.16

Da A_1A_2 ikke er tangent til den omskrevne cirkel, skærer den cirklen i et punkt X foruden A_2, og da A_1A_2 ikke indeholder nogen af de øvrige punkter som er nævnt i opgaven, og alle punkter nævnt i opgaven er indbyrdes forskellige, er punkterene C, B, B_2, X, A_2, A indbyrdes forskellige. Af Pascals sætning anvendt på disse punkter følger det så at B_2X skærer AC i et punkt på A_1M, altså i B_1. Dermed går B_1B_2 gennem X. Tilsvarende går C_1C_2 gennem X

Opgave 9.17

Fordi trekant ABC ikke er retvinklet, findes trekant AEF's omskrevne cirklen $\mathcal{C}$. Den går gennem højdernes skæringspunkt H, og E, F, H ligger ikke på BC. Dermed findes linjerne

PE og QF, og de har højst ét fælles punkt. Da der gælder $BP^2 = BA \cdot BF = BQ^2$, er B midtpunkt af PQ og dermed forskelligt fra P og Q. Lad U og S betegne $\mathcal{C}$'s skæringspunkter med PA og PE bortset fra at vi sætter $S = E$ hvis PE rører $\mathcal{C}$. Da FA og HE mødes i B, og AU og ES i P, følger det så af Pascals sætning anvendt på sekskant $FAUHES$ at UH og SF mødes i et punkt på BP. Dette punkt er entydigt fordi hverken H eller F ligger på BP. Hvis vi kan vise at HU går gennem Q, kan vi så slutte at SF går gennem Q, og dermed at PE og QF skærer hinanden i S, som ligger på $\mathcal{C}$.

Vi skal altså vise at HU går gennem Q. Lad AD være højde i trekant ABC. Da denne ikke er retvinklet, er B og D forskellige. Vi har allerede indset at F og H ikke ligger på BC. Særlig følger $D \neq H$, og da cirklerne med diametre AD og AH så ikke begge kan gå gennem F, er P forskelligt fra D. Dermed er U forskelligt fra P og ligger så heller ikke på BC; ellers ville $\mathcal{C}$ være identisk med cirkel AFP, og der ville gælde $D = P$. Altså findes firkanterne $PUHD$ og $DHBF$. Da disse firkanter er indskrivelige, har vi

$$PA \cdot UA = DA \cdot HA = BA \cdot FA\,.$$

Når dette kombineres med $PA \cdot UA = AP^2 - PA \cdot PU$ og $BA \cdot FA = AB^2 - BA \cdot BF = AB^2 - BP^2$, får vi

$$PA \cdot PU = AP^2 + BP^2 - AB^2 = 2\,\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 2\,PD \cdot PB = PD \cdot PQ\,.$$

Trekanterne PAD og PQU er så ensvinklede. Da både QU og HU dermed er vinkelrette på PA, går HU gennem Q som ønsket.