Opgaver i diskret matematik

Opgave 1
På hvor mange måder kan 10 to-kroner og 6 fem-kroner lægges på en række når der mellem to femkroner skal ligge mindst en tokrone?

Opgave 2
I en by bor n mennesker der hver kender et unikt rygte som ingen af de andre indbyggere kender til. Indbyggerne sender nu e-mails til hinanden således at de hver gang de sender en e-mail, skriver om alle de rygter de kender, og der kun er en modtager pr. e-mail. Hvor mange e-mails skal der mindst sendes før alle indbyggere kender til alle n rygter?

Opgave 3
På en tavle står tallene $1, 2, 3, \ldots, n$. To spillere A og B spiller følgende spil. De skiftes til at trække, og i hvert træk må man fjerne et tal m samt alle dets divisorer. Den som fjerner det sidste tal, har vundet. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi når A starter?

Opgave 4
Et L-klistermærke består af tre enhedskvadrater der danner en L-lignende figur. Kan overfladen af en $2^n \times 2^n \times 2^n$ kube dækkes af L-klistermærker som ikke overlapper hinanden? (De må gerne bøjes om kanten.)

Opgave 5
Kan alle punkterne på en cirkelskive med radius 1 (inklusiv randen) deles i tre mængder således at ingen af de tre mængder indeholder to punkter hvis indbyrdes afstand er 1?

Opgave 6
To spillere spiller følgende spil på et 8×8 skakbræt. De har hver et tårn på brættet som til at starte med er placeret i to hjørner modsat hinanden. I hvert træk skal en spiller flytte sit tårn vandret eller lodret således at spilleren ikke passerer eller ender på en række eller en søjle hvor modstanderens tårn er placeret. Den som først ikke kan trække, har tabt. Har en af de to spillere en vindende strategi, og i givet fald hvilken?

Opgave 7
Vis at $\Big((mn)!\Big)^2$ er delelig med $(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}$ for alle positive hele tal n og m.

Løsningsskitser til opgaver i diskret matematik

Opgave 1
Hvis vi lægger de 10 to-kroner på række er der 11 positioner hvor vi må lægge en fem-krone (en før, 9 mellemrum, en efter), og vi skal lægge en fem-krone på netop 6 af disse pladser. Dermed er der $\binom{11}{6} = 462$ muligheder. Bemærk at to rækker som kan spejles i hinanden ikke betragtes som ens.

Opgave 2
Der skal sendes mindst en e-mail per indbygger før end alle har delt deres rygte med mindst en anden indbygger dvs. efter n e-mails er der højst to indbyggere som kender alle n rygter, nemlig de to indbygger som har modtaget de to sidste e-mails. Derfor skal der yderligere sendes mindst $n-2$ e-mails før alle kender alle n rygter. Dette giver et minimum på $2n-2$ e-mails. Det er muligt at sende $2n-2$ så alle hører om alle n rygter: Først udvælges en indbygger A. Alle sender først en e-mail til A, som derefter sender en e-mail som indeholder alle n rygter til alle.

Opgave 3
Spiller A har en vindende strategi, og dette viser vi indirekte. Antag at spiller B har en vindende strategi. Først fjerner spiller A tallet 1, og derefter fjerner spiller B tallet m og dets divisorer. Da spiller B følger sin vindende strategi, efterlader hun en tabende situation til A, og denne situtaion betegnes S. Men hvis spiller A starter med at fjerne m og alle dets divisorer, da efterlader A situationen S til B og har dermed en vindende strategi hvilket er en modstrid. Dermed kan spiller B ikke have en vindende strategi, og da spillet ender med en vinder efter et endeligt antal træk, må A have en vindende strategi.

Opgave 4
Ved induktion efter n vises først at et $2^n \times 2^n$-kvadrat hvor et enhedskvadrat er fjernet, kan dækkes af L-klistermærker. Det er oplagt sandt for $n = 1$. Antag at et $2^n \times 2^n$ kvadrat hvor der er fjernet et enhedskvadrat, kan dækkes af L-klistermærker. Et $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-kvadrat kan inddeles i fire $2^n \times 2^n$-kvadrater hvor et enkelt enhedskvadrat er fjernet. Nu dækkes tre af de midterste fire felter af et L-klistermærke således at der er fjernet præcist et enhedskvadrat i hver af de fire $2^n \times 2^n$-kvadrater, og de kan dermed ifølge induktionsantagelsen dækkes af L-klistermærker. En $2^n \times 2^n \times 2^n$-kube kan dermed dækkes af L-klistermærker på følgende måde. I to hjørner som ligger modsat hinanden, dækkes de tre tilstødende enhedskvadrater med L-klistermærker. Nu består hver side af et $2^n \times 2^n$-kvadrat hvor et felt er fjernet, og kan dermed dækkes med L-klistermærker.

Opgave 5
Nej. Lad O være centrum af cirklen, og lad P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 og P_6 være seks punkter på cirkelperiferien som danner en regulær sekskant, således at P_2 ligger ved siden af P_1, P_3 ved siden af P_2, osv. Hvis der findes en opdeling i tre mængder med den ønskede egenskab, da må $\{O\}$, $\{P_1, P_3, P_5\}$ og $\{P_2, P_4, P_6\}$ være delmængder af forskellige mængder, lad os sige af henholdsvis A, B og C. Betragt nu mængden S af punkter som ligger i afstand 1 fra P_1, P_3 eller P_5. Punkterne i S danner tre udsnit af cirkelbuer der alle skærer hinanden i O, og parvis skærer hinanden i henholdsvis P_2, P_4 og P_6, og ingen af punkterne i S må tilhøre mængden B. Betragt nu cirklen med centrum i O og radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Seks af punkterne på denne cirkel ligger i S. Vælg nu tre af disse seks punkter, således at de tre punkter danner en ligesidet trekant. Da radius i cirklen er $\frac{1}{\sqrt{3}}$, vil sidelængden i denne trekant være

1, og vi har dermed fundet tre punkter som skal ligge i A eller C, og hvis indbyrdes parvise afstand er 1, hvilket er umuligt.

Opgave 6

Spiller nummer to har en vindende strategi. Til at starte med står de to tårne på en diagonal. Lad os wlog antage at spiller tos tårn står i øverste højre hjørne. Når spiller nummer et har trukket, står de to tårne ikke længere på en diagonal. Spiller nummer tos vindende strategi er i hvert træk at flytte et antal felter ned eller et antal felter til venstre således at de to tårne atter står på en diagonal. (Overvej at dette altid er muligt). Ved at følge denne strategi er det altid muligt for spiller to at trække, og spiller to vil også vinde efter et endeligt antal træk da hun i hvert træk formindsker den del af brættet som spiller nummer et har mulighed for at bevæge sig på, med mindst en række eller en søjle.

Opgave 7

Antal måder hvorpå man kan vælge m hold med n deltagere på hver ud af nm personer, er $\frac{(nm)!}{(n!)^m m!}$ hvor $m!$ i nævneren skyldes at de m hold ikke nummereres. Tilsvarende kan man vælge n hold med m deltagere på hver på $\frac{(nm)!}{(m!)^n n!}$ måder, og dermed er

$$\frac{(nm)!}{(n!)^m m!}\frac{(nm)!}{(m!)^n n!} = \frac{\Big((nm)!\Big)^2}{(n!)^{m+1}(m!)^{n+1}}$$

et helt tal for alle positive hele tal n og m, hvilket viser det ønskede.